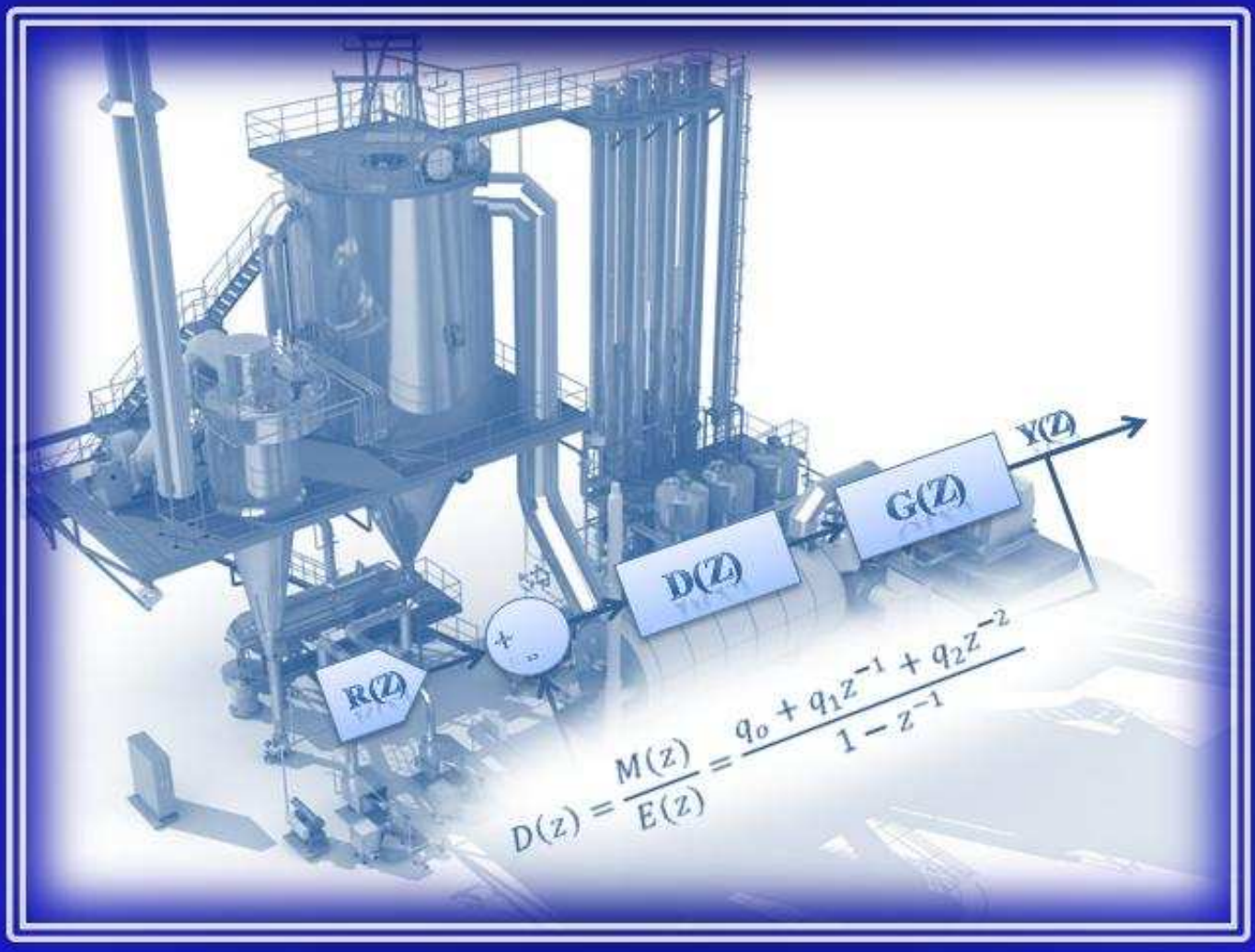
Control Digital

Teoría y Práctica

Segunda Edición



Luis Eduardo García Jaimes

Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid
Medellín - 2009

CONTROL DIGITAL

TEORÍA Y PRÁCTICA

CONTROL DIGITAL
TEORÍA Y PRÁCTICA

SEGUNDA EDICIÓN

LUIS EDUARDO GARCÍA JAIMES

POLITÉCNICO COLOMBIANO JIC

MEDELLÍN, 2009

.

A la memoria de Martha y de mi padre.

Dedico a mi madre a Gloria y a mis hijos.

Entrego a mis alumnos.

TABLA DE CONTENIDO

	Pag
PRÓLOGO	**Xii**
1 INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL	**1**
1.1 SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO	2
1.2 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS	4
1.2.1 Planta y Proceso	4
1.2.2 Elemento sensor primario	4
1.2.3 Transmisor	4
1.2.4 Transductor	4
1.2.5 Convertidor	4
1.2.6 Controlador	5
1.2.7 Elemento final de control	5
1.3 MUESTREADORES	5
1.4 RETENEDORES	7
1.5 CONVERTIDOR DIGITAL A ANÁLOGO (D/A)	11
1.6 CONVERTIDOR ANÁLOGO A DIGITAL (A/D)	14
1.7 SELECCIÓN DEL PERIODO DE MUESTREO	16
1.7.1 Teorema del muestreo de Shannon	17
1.7.2 Aliasing o confusión de frecuencias	18
PROBLEMAS PROPUESTOS	22
REFERENCIAS	26
2 INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA Z	**27**
2.1 TRANSFORMADA Z DE FUNCIONES SENCILLAS	28
2.1.1 Transformada z de la función escalón unitario	28

	Pag
2.1.2 Transformada z de la función rampa	29
2.1.3 Transformada z de la función exponencial	29
2.1.4 Transformada z de la función polinomial	29
2.2 PROPIEDADDES DE LA TRANSFORMADA Z	33
2.2.1 Multiplicación por una constante:	33
2.2.2 Propiedad de Linealidad	33
2.2.3 Multiplicación por a^k	33
2.2.4 Propiedad de Traslación	33
2.2.5 Propiedad de la Traslación Compleja	34
2.2.6 Teorema del Valor Inicial	35
2.2.7 Teorema del Valor Final	35
2.3 TRANSFORMADA Z INVERSA	37
2.3.1 Método de la división larga	38
2.3.2 Método de expansión en fracciones parciales	39
2.3.3 Método de la Integral de Inversión	43
2.3.4 Método Computacional	45
2.4 LA TRANSFORMADA Z MODIFICADA	50
2.5 APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA Z EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE DIFERENCIAS.	51
PROBLEMAS PROPUESTOS	55
REFERENCIAS	60
3. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO	**61**
3.1 PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO	63
3.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO DE UN SISTEMA CON RETENEDOR DE ORDEN CERO.	65
3.3 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO DE UN SISTEMA CON ELEMENTOS EN CASCADA	67

	Pag
3.4 SISTEMAS DE LAZO ABIERTO CON FILTROS DIGITALES INCLUIDOS	72
3.5 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO PARA UN SISTEMA EN LAZO CERRADO.	75
3.6 PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO EN LAZO CERRADO	80
PROBLEMAS PROPUESTOS	82
REFERENCIAS	92
4 MÉTODOS DE ANÁLISIS PARA SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO	**93**
4.1 EL PLANO Z Y SU RELACIÓN CON EL PLANO S	93
4.2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS DISCRETOS	97
4.2.1 Prueba de estabilidad de Jury	98
4.2.2 Criterio de estabilidad de Routh para sistemas discretos	102
4.3 ANÁLISIS DE RESPUESTA TRANSITORIA Y DE ESTADO ESTABLE	106
4.3.1 Especificaciones de respuesta transitoria	106
4.3.2 Análisis de error en estado permanente en sistemas discretos	108
4.3.3 Raíces dominantes	116
4.4 EL MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES	117
4.4.1 Condición de ángulo y condición de módulo	118
4.4.2 Reglas para construir el lugar de las raíces en sistemas discretos	119
4.5 MÉTODO DE RESPUESTA EN FRECUENCIA	131
4.5.1 Diagramas de Bode	133
4.5.2 Margen de ganancia y Margen de fase	134
PROBLEMAS PROPUESTOS	141
REFERENCIAS	154

	Pag
5 IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS	**155**
5.1 TIPOS DE MODELOS	156
5.2 PROCEDIMIENTO PARA LA IDENTIFICACIÓN.	156
5.2.1 Recolección de datos	156
5.2.2 La Selección del Modelo	157
5.2.3 Validación del Modelo	157
5.3 MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN NO PARAMÉTRICOS	157
5.3.1 Modelo: Planta de primer orden con retardo (Modelo POR)	158
5.3.2 Modelo: Planta de segundo orden con retardo (Modelo SOR)	160
5.3.3 Modelo: planta puramente capacitiva.	164
5.3.4 Modelo: Planta de segundo orden (Lazo cerrado)	166
5.4 IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA	169
5.4.1 Identificación por el método de mínimos cuadrados no recursivo	169
5.4.2 Identificación por el método de mínimos cuadrados recursivos	175
PROBLEMAS PROPUESTOS	183
REFERENCIAS	188
6 ALGORITMOS DE CONTROL DIGITAL	**189**
6.1 APROXIMACIÓN DISCRETA DE LOS MODOS DE CONTROL P, PI Y PID O CONVENCIONALES.	191
6.1.1 Control Proporcional (P)	191
6.1.2 Control Proporcional más Integral (PI)	192
6.1.3 Control Proporcional más Integral más Derivativo (PID)	194
6.2 AJUSTE DE LOS CONTROLADORES P, PI Y PID	195
6.2.1 Método de la Ganancia Limite	195
6.2.2 Método de la Curva de Reacción	197
6.2.3 Ajustes Mediante Criterios de Error Mínimo	198
6.3 DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES	204

	Pag
6.3.1 Diseño de Controladores PI y PID por Cancelación de Ceros y Polos	204
6.3.2 Controlador por Cancelación de Ceros y Polos	205
6.3.3 Controlador Deadbeat de Orden Normal DB(m)	210
6.3.3.1 Para sistemas sin tiempo muerto (n = θ'/T = 0)	211
6.3.3.2 Para sistemas con tiempo muerto (n=θ'/T = 1, 2, 3,...)	213
6.3.4 Controlador Deadbeat de Orden Incrementado DB(m+1)	214
6.3.4.1 Para sistemas sin tiempo muerto (n=0)	214
6.3.4.2 Para Sistemas con Tiempo Muerto (n = 1, 2, 3...)	215
6.3.5 Algoritmo de Dalhin.	218
6.3.5.1 Sistema de primer orden con retardo	219
6.3.5.2 Modelo de segundo orden con retardo	220
6.3.6 Diseño de controladores digitales por asignación de polos	223
6.3.6.1 Diseño por asignación de polos (Primer método)	223
6.3.6.2 Diseño por asignación de polos (Segundo método)	225
6.3.7 Diseño de un controlador PI por asignación y cancelación de polos para un sistema de primer orden (POR)	228
6.3.8 Método de Ciancone-Marlin	231
6.3.9 Método de Cohen-Coon	233
6.3.10 Control con modelo interno	236
PROBLEMAS PROPUESTOS	240
REFERENCIAS	254
7 DISEÑO DE COMPENSADORES DIGITALES	**255**
7.1 DISEÑO DE COMPENSADORES DIGITALES UTILIZANDO TECNICAS DE RESPUESTA DE FRECUENCIA	258
7.1.1 Diseño de un Compensador de Adelanto Utilizando Diagramas de Bode	259
7.1.2 Diseño de un compensador de atraso utilizando diagramas	

	Pag
Bode	272
7.2 DISEÑO DE COMPENSADORES UTILIZANDO EL METODO DEL LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES	277
7.2.1 Diseño de un compensador de adelanto utilizando el método del lugar de las raíces	277
7.2.2 Diseño de un compensador de atraso utilizando el método del lugar de las raíces	282
7.2.3 Controlador PI	287
7.3 DISEÑO DE COMPENSADORES POR EL METODO DE RAGAZZINI	290
PROBLEMAS PROPUESTOS	296
REFERENCIAS	304
8 ANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO	***305***
8.1 FORMAS CANÓNICAS PARA ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO EN TIEMPO DISCRETO	308
8.1.1 Forma Canónica Controlable	309
8.1.2 Forma Canónica Observable	309
8.1.3 Forma Canónica Diagonal	310
8.1.4 Forma Canónica de Jordan	311
8.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO Y REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADO.	314
8.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE ESTADO EN TIEMPO DISCRETO	315
8.3.1 Método Recursivo	315
8.3.2 Método de la Transformada Z	317
8.4 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO	319
8.5 TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES DE ESTADO A FORMAS	

	Pag
CANONICAS	323
8.5.1 Transformación a la forma Canónica Controlable	324
8.5.2 Transformación a la forma Canónica Observable	325
8.5.3 Transformación a la forma Canónica Diagonal	325
PROBLEMAS PROPUESTOS	331
REFERENCIAS	342
9 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO UTILIZANDO ASIGNACIÒN DE POLOS	**343**
9.1 CONTROLABILIDAD	344
9.1.1 Controlabilidad Completa del Estado	344
9.1.2 Controlabilidad Completa de la salida	345
9.2 OBSERVABILIDAD	346
9.3 CONTROL POR REALIMENTACIÓN DEL ESTADO Y ASIGNACIÓN DE POLOS	349
CALCULO DE LA MATRIZ DE GANANCIA DE REALIMENTACIÓN	351
9.4.1 Método de Sustitución Directa	351
9.4.2 Formula de Ackerman	352
9.5 SISTEMA DE CONTROL CON ENTRADA DE REFERENCIA	357
9.6 OBSERVADORES DE ESTADO DE ORDEN COMPLETO	361
9.7 OBSERVADOR DE ESTADO TIPO PREDICTOR	362
9.7.1 Error en la estimación	364
9.7.2 Diseño de la matriz de ganancia del observador	365
9.7.2.1 Método de sustitución directa	365
9.7.2.2 Formula de Ackerman	366
9.7.3 Ecuación Característica del Sistema con el Observador Predictor Incluido	368
9.7.4 Función de Transferencia de Pulso del Controlador	368

	Pag
9.8 OBSERVADOR DE ESTADO TIPO CORRIENTE	376
9.9 OBSERVADOR DE ESTADO DE ORDEN REDUCIDO	382
9.10 SISTEMAS TIPO SERVO	389
9.11 SISTEMAS NO LINEALES	395
9.11.1 Linealización de sistemas no lineales	397
9.11.2 Diseño de Controladores para Sistemas no Lineales	398
PROBLEMAS PROPUESTOS	402
REFERENCIAS	412

PROLOGO

Como consecuencia del gran avance experimentado por la computación digital prácticamente todos los sistemas de control construidos hoy en día se basan en microprocesadores y sofisticados microcontroladores. La utilización de los sistemas de control basados en computador permiten satisfacer especificaciones más exigentes que las que se pueden lograr con los sistemas analógicos así como posibilitar nuevas funcionalidades.

Desde esta perspectiva, el objetivo central el control digital consiste en proporcionar el conocimiento y las capacidades mínimas necesarias para analizar y diseñar de una manera efectiva sistemas controlados por computador.

En estos sistemas el computador, conectado a un proceso físico determinado del que recibe información, calcula las acciones adecuadas y actúa a lo largo del tiempo para que dicho proceso evolucione de acuerdo con las especificaciones de diseño.

El desarrollo industrial ha traído consigo la aparición de nuevos procesos y la necesaria optimización de los ya existentes con el fin de lograr productos de alta calidad, utilizando tecnologías avanzadas que precisan de sistemas de control de alto rendimiento y confiabilidad. Este libro pretende dar una respuesta a esta necesidad abordando el problema desde el punto de vista del control digital

Para su desarrollo el texto se ha dividido en nueve capítulos, a través de los cuales se lleva al lector desde los conceptos básicos del control digital, hasta el diseño de sistemas de control digital no convencionales utilizando técnicas de realimentación del estado y asignación de polos.

El primer capítulo presenta una introducción a los sistemas de control digital y en él se definen los elementos básicos que intervienen en un lazo de control, incluyendo diferentes criterios para la adecuada selección del tiempo de muestreo.

En el capítulo dos se plantean los principios fundamentales de la transformada Z, herramienta indispensable en el tratamiento matemático de los sistemas discretos. Acá se define la transformada Z, la transformada Z inversa y sus propiedades y aplicaciones específicas.

En el capítulo tres se presenta la teoría correspondiente a la discretización de sistemas continuos, se define el concepto de función de transferencia de pulso en lazo abierto y en lazo cerrado y se presentan los métodos más utilizados para obtenerlas.

En el capítulo cuatro se presentan los métodos de análisis para sistemas de control de tiempo discreto. Se estudia la estabilidad de los sistemas discretos, su respuesta transitoria y el error de estado estable. Así mismo, en este capítulo se analiza la respuesta en frecuencia y el método del lugar geométrico de las raíces, ilustrados con ejemplos prácticos.

En el capítulo cinco se analizan algunas técnicas de identificación tanto paramétricas como no paramétricas. Se incluyen técnicas de identificación utilizando la respuesta del sistema al escalón y técnicas de identificación utilizando mínimos cuadrados y mínimos cuadrados recursivos.

El capítulo seis presenta en detalle el diseño de algoritmos de control digital. El desarrollo de este capítulo incluye desde la aproximación discreta de los modos de control convencional P, PI y PID hasta el diseño de controladores por asignación de polos y el diseño de controladores no convencionales como los controladores tipo Dalhin, Deadbeat, etc.

El capítulo siete se refiere al diseño de compensadores, incluyendo compensadores de adelanto, de atraso y de atraso-adelanto. Se diseñan utilizando técnicas de respuesta en frecuencia y técnicas del lugar geométrico de las raíces.

El capítulo ocho presenta un análisis de los sistemas de control en el espacio de estado en tiempo discreto, en este capítulo se plantean los fundamentos matemáticos necesarios para realizar diseño de sistemas de control en dicho espacio.

Finalmente, en el capítulo nueve se plantea la parte correspondiente al diseño de sistemas de control en el espacio de estado, utilizando la técnica de asignación de

polos. Acá se manejan los conceptos de observabilidad y controlabilidad y, por último, se diseña el sistema de control apropiado para el proceso.

El contenido del texto va acompañado de una buena cantidad de ejemplos resueltos con el fin de afianzar la parte teórica expuesta. Al final de cada capítulo se plantean algunos problemas prácticos a través de los cuales se resume, en su totalidad, la aplicación de la teoría desarrollada a lo largo del capítulo.

Gran parte de los temas que se presentan en el texto se ha trabajado durante varios semestres en cursos de ingeniería en instrumentación y control a nivel de pregrado y de especialización en automatización industrial a nivel de posgrado, con muy buenos resultados.

El contenido del libro, a nivel de pregrado, se puede cubrir en dos semestres. En un curso de un semestre es posible cubrir la mayoría de los temas involucrados en los seis primeros capítulos, material con el cual el estudiante estará en capacidad de analizar, diseñar e implementar un sistema de control digital para un determinado proceso.

Luís Eduardo García Jaimes

CAPITULO UNO

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL

En los últimos 20 años, la tecnología de los sistemas de control automático se ha caracterizado por la sustitución de los lazos de control análogo por sistemas de control digital.

La utilización del computador en el control de procesos permite resolver problemas específicos de regulación y de seguimiento de consignas con una mejor relación de funciones de supervisión, monitoreo y tratamiento de datos con un reducido costo adicional.

El empleo del computador como elemento de control ofrece, con respecto al control analógico la ventaja de la posibilidad de cambio en la estrategia de control con sólo modificar algunas instrucciones en el programa además, el computador puede controlar varios procesos simultáneamente y, dependiendo de sus características, puede realizar a la vez las funciones de procesamiento de datos, supervisión y monitoreo como se mencionó anteriormente.

1.1 SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO

Los sistemas de tiempo discreto, son sistemas dinámicos en los cuales una o más variables pueden variar únicamente en ciertos instantes. Estos instantes, llamados de muestreo y que se indican por $kT\ (k = 0, 1, 2\ldots)$ pueden especificar el momento en el cual se realiza una medición física o el tiempo en el cual se lee la memoria del computador.

A diferencia de los sistemas de tiempo continuo, cuyo comportamiento se describe o modela mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales, los sistemas de tiempo discreto se describen mediante un conjunto de ecuaciones de diferencias. El análisis de sistemas continuos lineales e invariantes en el tiempo se realiza utilizando la transformada de Laplace, mientras que para los sistemas discretos se utiliza la transformada z.

Al igual que en los sistemas continuos, la modelación de los sistemas discretos se puede realizar tomando como base el concepto de función de transferencia o el concepto de variables de estado [1.1]

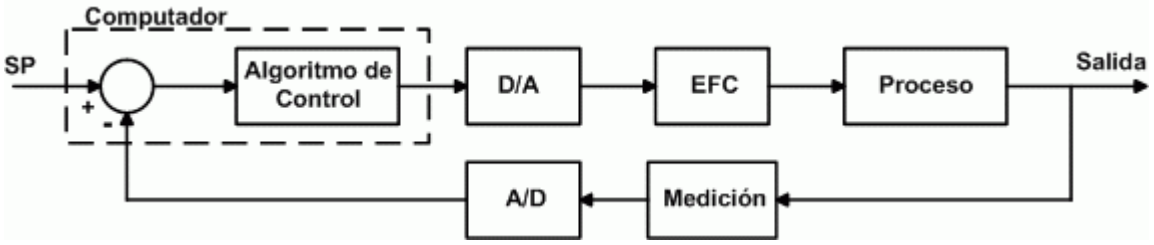


Figura 1.1 Lazo de control digital básico

La figura 1.1 muestra el diagrama en bloques de un sistema de control digital básico. Para realizar el control, se mide la variable controlada (salida del proceso) mediante el sensor adecuado. La salida del sensor, previamente convertida en señal eléctrica estándar se aplica al convertidor de análogo a digital (A/D) a través de un circuito de muestreo y retención (S/H). El valor de la señal discreta producida por el convertidor A/D se compara con el valor discreto prefijado en el

Set-Point (SP), el computador establece la diferencia (error) entre éstos valores y ejecuta un programa en el cual se ha establecido el algoritmo de control deseado. De acuerdo con el algoritmo de control, el computador proporciona una señal de salida discreta que es convertida en una señal eléctrica continua mediante un convertidor de digital a análogo (D/A). Finalmente, la salida del convertidor D/A, previamente acondicionada es aplicada al elemento final de control (válvula de control), cuya acción sobre la variable manipulada, realiza la corrección del error llevándolo a cero o a un valor mínimo aceptable. La estrategia de control se repite constantemente y con una frecuencia determinada, realizando así el computador, el control del proceso.

En la actualidad, el control por computador se utiliza ampliamente en la regulación de procesos químicos, en el control de máquinas y herramientas, en aviones y en muchos otros procesos industriales y de servicios.

La figura 1.2 muestra la disposición de los diferentes elementos que intervienen en el control digital de la presión de un tanque con descarga a la atmósfera regulando la entrada de aire mediante la válvula de control PCV. Se deduce fácilmente que el diagrama en bloques de la figura 1.1 corresponde a este sistema de control

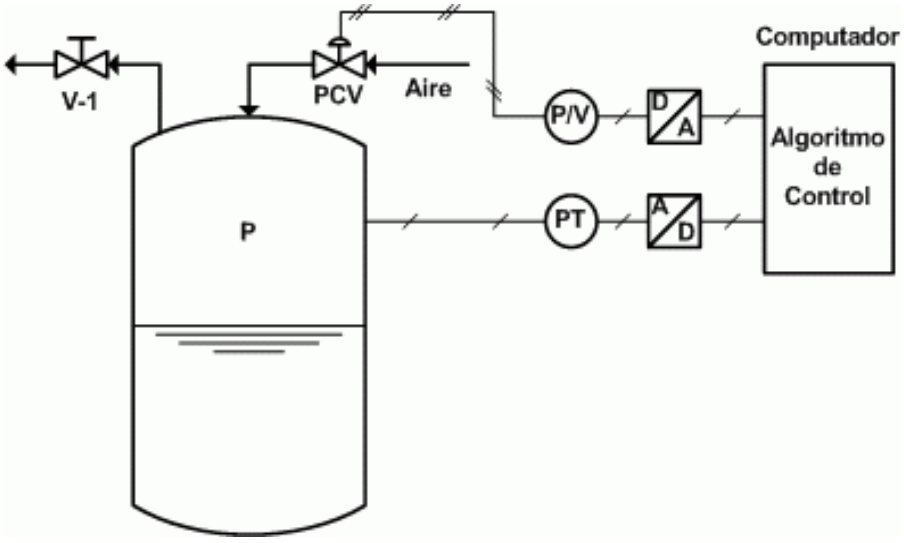


Figura 1.2 Control de presión

1.2 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS

A continuación se presenta la definición de algunos términos utilizados con frecuencia en instrumentación de procesos y en el análisis de los sistemas de control digital [1.2]

1.2.1 Planta y Proceso: En términos generales, una planta es cualquier objeto físico que se va a controlar. Como ejemplos de planta se pueden citar: un intercambiador de calor, un reactor químico, una caldera, una torre de destilación. Un proceso se puede entender como una operación progresiva en la cual se presenta una serie de cambios que se suceden uno a otro de manera relativamente fija y que conducen a un resultado determinado. Los procesos pueden ser químicos, biológicos, económicos etc.

1.2.2 Elemento sensor primario: Es el elemento que está en contacto con la variable que se mide y utiliza o absorbe energía de ella para dar al sistema de medición una indicación que depende de la cantidad medida. La salida de este elemento es una variable física que puede ser un desplazamiento, una corriente, un voltaje etc.

1.2.3 Transmisor: Es un dispositivo que capta la variable del proceso a través del elemento sensor primario y la transmite en forma de señal estándar. Esta señal puede ser neumática (3 a 15 PSI) o electrónica (4 a 20 mA). También se utilizan señales electrónicas de 1 a 5 mA, de 10 a 50 mA, de 0 a 20 mA y de 0 a 5 Voltios. Algunos transmisores inteligentes utilizan señales digitales que pueden procesarse directamente en el computador.

1.2.4 Transductor: Es un instrumento que convierte una señal de entrada en una señal de salida cuya naturaleza puede ser o no ser diferente de la correspondiente a la señal de entrada. Son transductores: un elemento sensor primario, un transmisor, un convertidor de PP/I (Presión de proceso a corriente), un convertidor de PP/P (Presión de proceso a señal neumática) etc.

1.2.5 Convertidor: Es un dispositivo que recibe una señal de entrada neumática (3-15 PSI) o electrónica (4-20 mA), procedente de un instrumento y, después de modificarla, genera una señal de salida estándar. Ejemplo: un convertidor P/I

(Señal de entrada neumática a señal de salida electrónica), un convertidor I/P (Señal de entrada electrónica a señal de salida neumática).

1.2.6 Controlador: Es el dispositivo que compara el valor de la variable controlada (presión, temperatura, nivel, velocidad, Ph) con el valor deseado (Set-Point o referencia) y utiliza la diferencia entre ellos (error) para ejercer, automáticamente, la acción correctiva con el fin de reducir el error a cero o a un valor mínimo aceptable. El controlador produce la acción correctora para enviarla al elemento final de control.

1.2.7 Elemento final de control: Recibe la señal del controlador y modifica el caudal del agente o fluido de control. En sistemas de control neumático, el elemento final de control es una válvula neumática que efectúa su carrera completa cuando la presión cambia de 3 a 15 PSI. En sistemas de control electrónico o sistemas de control digital la válvula es accionada a través de un convertidor de señal electrónica o digital a presión que convierte la señal electrónica de 4 a 20 mA o la señal digital, en una señal neumática de 3 a 15 PSI.

En ciertas aplicaciones, el elemento final de control está constituido por elementos de estado sólido los cuales reciben, previamente acondicionada, la señal proveniente del controlador.

1.3 MUESTREADORES

El muestreador es el elemento fundamental en un sistema de control de tiempo discreto. Consiste simplemente en un interruptor que se cierra cada T segundos para admitir una señal de entrada. En la práctica, la duración del muestreo debe ser mucho menor que la constante de tiempo mas significativa de la planta o proceso. La función del muestreador es convertir una señal continua en el tiempo (análoga) en un tren de pulsos en los instantes de muestreo 0, T, 2T…en donde T es el periodo de muestreo. Entre dos instantes de muestreo no se transmite información. La figura 1.3a muestra el diagrama en bloques de un

muestreador y la figura 1.3b representa la forma de la señal a la entrada y a la salida del muestreador.

Teniendo en cuenta que la salida del muestreador es un tren de pulsos ponderado, es posible relacionar la señal continua x(t) con la salida del muestreador mediante la ecuación:

$$x^*(t) = x(t)\delta(t) \qquad 1.1$$

En donde $\delta(t)$ representa un tren de pulsos unitarios como se indica en la figura 1.3.a. Si la señal continua es muestreada en forma periódica, la señal de salida del muestreador se puede expresar como:

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT) \qquad 1.2$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \qquad 1.3$$

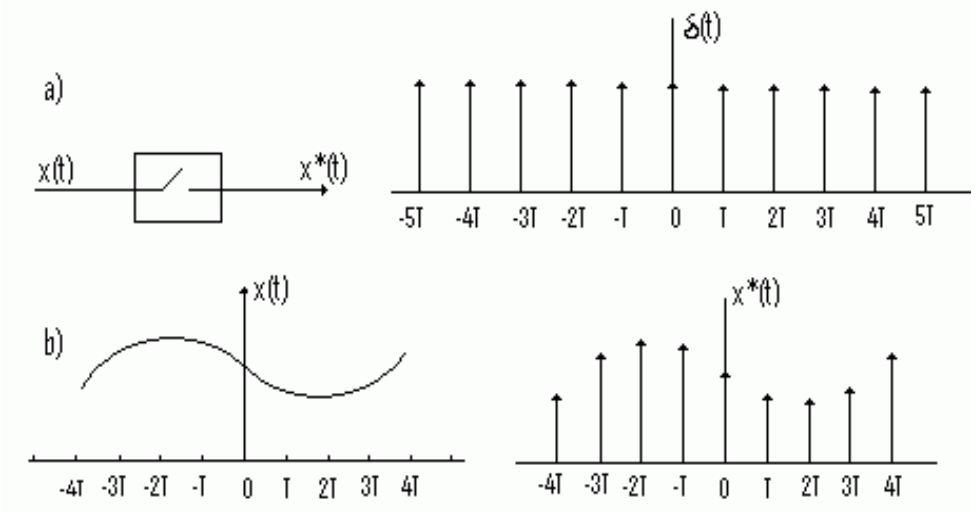


Figura 1.3 a) Muestreador b) Señales de entrada y salida del muestreador

En la práctica, las señales o funciones temporales que se consideran en los sistemas de control son cero para $t < 0$, en estas condiciones, las ecuaciones 1.2 y 1.3 se pueden escribir así:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t-kT) \qquad 1.4$$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \qquad 1.5$$

De la ecuación 1.5 se obtiene:

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \cdots \qquad 1.6$$

La transformada de Laplace de la ecuación anterior es:

$$X^*(S) = x(0) + x(T)e^{-ST} + x(2T)e^{-2ST} + x(3T)e^{-3ST} + \cdots$$

Es decir:

$$X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS} \qquad 1.6$$

La ecuación 1.6 resulta poco práctica para aplicarla en el análisis de sistemas de control pues genera una serie infinita. Si se quiere expresar $X^*(S)$ en forma cerrada, se puede utilizar la integral de convolución [1.4] a partir de la cual se obtiene como resultado:

$$X^*(S) = \sum \left[Residuos\ de\ x(\lambda) \cdot \frac{1}{1-e^{-(S-\lambda)T}} \right]\Bigg|_{\lambda = polos\ de\ x(\lambda)} \qquad 1.7$$

1.4 RETENEDORES

En la práctica, la señal en forma muestreada no se debe aplicar directamente a la planta por lo tanto es necesario incluir, después del muestreador, un dispositivo que reconstruya la señal. Este dispositivo se conoce con el nombre de retenedor y su finalidad es convertir la señal muestreada en una señal continua de tal forma que sea igual o lo más aproximada posible a la señal aplicada al muestreador.

El retenedor más elemental convierte la señal muestreada en una señal que es constante entre dos instantes de muestreo consecutivos, este tipo de retenedor se conoce como **"retenedor de orden cero"** y es comúnmente el más utilizado. La exactitud del retenedor de orden cero en la reconstrucción de la señal depende de la magnitud del periodo de muestreo T. La figura 1.4a muestra un diagrama en

bloques del conjunto muestreador-retenedor y la figura 1.4b da las formas de la señal de entrada y de salida en cada uno de estos dispositivos.

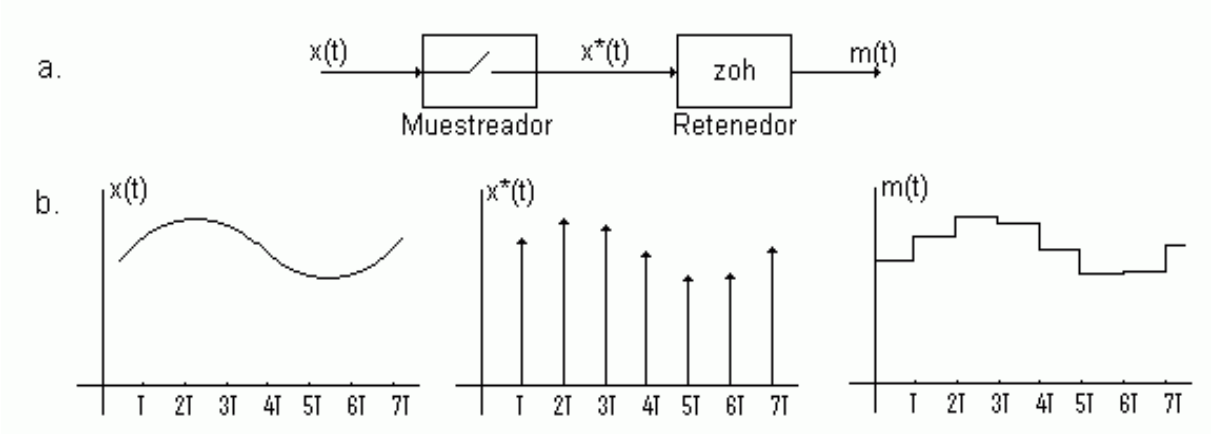


Figura 1.4 a) Conjunto muestreador-retenedor b) Señales entrada-salida en el muestreador y en el retenedor

Existen otros retenedores más sofisticados que el de orden cero. Estos se conocen como retenedores de orden superior y entre ellos están los retenedores de primer orden y segundo orden. Estos dispositivos reconstruyen la señal en forma más exacta que los retenedores de orden cero pero, por su misma configuración, introducen un retardo adicional al sistema que no es recomendable en aplicaciones de control.

La función de transferencia $H(S)$ de un retenedor de orden cero se puede deducir teniendo en cuenta que la entrada al retenedor es el tren de pulsos:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

La transformada de Laplace de la ecuación anterior es, según la ecuación 1.6

$$X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS}$$

La salida del muestreador se puede expresar como:

$$\bar{m}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[u(t-kT) - u(t-(k+1)T]$$

La transformada de Laplace de la ecuación anterior es:

$$\bar{M}(S) = \frac{1}{S}(1 - e^{-ST}) \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{kTS}$$

Pero:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{kTS} = X^*(S)$$

Entonces:

$$\bar{M}(S) = \frac{1}{S}(1 - e^{-ST})X^*(S)$$

De la ecuación anterior se obtiene la función de transferencia del retenedor de orden cero así:

$$H(S) = \frac{\bar{M}(S)}{X^*(S)} = \frac{1 - e^{-ST}}{S} \qquad 1.8$$

En la figura 1.5 se observa el diagrama básico de un circuito de muestreo y retención. Todos los componentes están dentro de un circuito integrado excepto el condensador C que se conecta externamente.

El funcionamiento del circuito es el siguiente: cuando el interruptor de estado sólido (S) se cierra, por efecto de una señal alta en la entrada lógica, el condensador C se carga al voltaje de entrada V_1, debido a que el amplificador operacional A_1 está configurado como un seguidor de voltaje. El amplificador A_1 tiene una alta impedancia de entrada y baja impedancia de salida lo cual permite que el condensador C se cargue y descargue rápidamente, de tal forma que mientras el interruptor de estado sólido (S) permanezca cerrado, el voltaje a través del condensador C sigue al voltaje de entrada V_1. Al desactivar la señal lógica de muestreo, el interruptor de estado sólido se abre pero, el condensador sigue cargado al voltaje existente en el momento de la apertura puesto que la impedancia de entrada al amplificador operacional A_2 es muy elevada. Como el amplificador A_2 está configurado como un seguidor de voltaje, su tensión de salida

también sigue fija en el valor que tenía el voltaje del condensador en el momento que reprodujo el muestreo

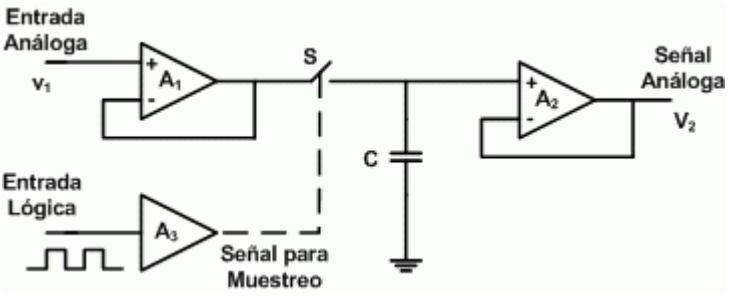


Figura 1.5 Circuito básico para muestreo y retención

EJEMPLO 1.1

La función $f(t) = e^{-2t} + 3$ se muestrea cada 0.5 seg. Calcular: a) La función muestreada $f^*(t)$ b) La transformada de Laplace $F^*(S)$ de $f^*(t)$ c) Si $f^*(t)$ se hace pasar por un retenedor de orden cero, obtenga una expresión para la señal de salida del retenedor.

SOLUCIÓN:

a) Utilizando la ecuación 1.5:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) \qquad f(kT) = e^{-2kT} + 3 = e^{-k} + 3$$

$$f^*(t) = \delta(t) + e^{-2T}\delta(t - T) + e^{-4T}\delta(t - 2T) + \cdots 3\delta(t) + 3\delta(t - T) + 3\delta(t - 2T) + \cdots$$

b) Tomando la transformada de Laplace a cada término de la ecuación anterior:

$$F^*(S) = 1 + e^{-2T}e^{-ST} + e^{-4T}e^{-2ST} + e^{-6T}e^{-\cdot ST} + \cdots 3 + 3e^{-ST} + 3e^{-2ST} + 3e^{-3ST} + \cdots$$

$$F^*(S) = 1 + e^{-T(S+2)} + e^{-2T(S+2)} + e^{-3T(S+2)} + \cdots 3(1 + e^{-ST} + e^{-2ST} + e^{-3ST} + \cdots)$$

La expresión anterior se puede escribir en la forma:

$$F^*(S) = \frac{1}{1 - e^{-T(S+2)}} + \frac{3}{1 - e^{-ST}}$$

Utilizando la ecuación 1.7 para calcular $F^*(S)$ se obtiene:

$$F(S) = \mathcal{L}\{e^{-2t} + 3\} = \frac{1}{S+2} + \frac{3}{S} \qquad F(S) = \frac{4S+6}{S(S+2)}$$

$$F(\lambda) = \frac{4\lambda + 6}{\lambda(\lambda+2)} \qquad \lambda = 0 \qquad \lambda = -2$$

$$F^*(S) = \sum \left[Residuos\ de\ \frac{4\lambda+6}{\lambda(\lambda+2)(1-e^{T(S-\lambda)})} \right] \Big|_{\lambda = polos\ de\ x(\lambda)}$$

$$F^*(S) = \frac{4\lambda+6}{\lambda(1-e^{T(S-\lambda)})}\Big|_{\lambda=-2} + \frac{4\lambda+6}{(\lambda+2)(1-e^{T(S-\lambda)})}\Big|_{\lambda=0}$$

Es decir:

$$F^*(S) = \frac{1}{1-e^{-T(S+2)}} + \frac{3}{1-e^{-ST}}$$

c) Utilizando la ecuación:

$$\bar{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[u(t-kT) - u(t-(k+1)T]$$

Se obtiene:

$$\bar{f}(t) = [e^0 + 3][u(t) - u(t-T)] + [e^{-1} + 3][u(t-T) - u(t-2T)] + [e^{-2} + 3][u(t-2T) - u(t-3T)] + \cdots$$

Simplificando resulta:

$$\bar{f}(t) = 4u(t) - 0.632u(t-T) - 0.2325u(t-2T) - 0.0855u(t-3T) + \cdots$$

1.5 CONVERTIDOR DIGITAL A ANÁLOGO (D/A)

Las operaciones más importantes relacionadas con el proceso de entrada y salida de datos en un computador, son la conversión análoga a digital (A/D) y la conversión digital a análoga (D/A)

La conversión de una señal digital a su correspondiente análoga consiste en transformar la información contenida en código digital (binario) en una señal equivalente de voltaje ó de corriente proporcional al valor digital.

Un convertidor de digital analógico (D/A) es un dispositivo que convierte datos digitales en señales de corriente o de tensión analógica.

En figura 1.6 se muestran los componentes básicos de un convertidor D/A. La función del circuito de conmutación es controlar la conexión de la fuente de voltaje utilizada como referencia, con los terminales de entrada apropiados de la red resistiva de acuerdo al valor digital de cada bit de entrada.

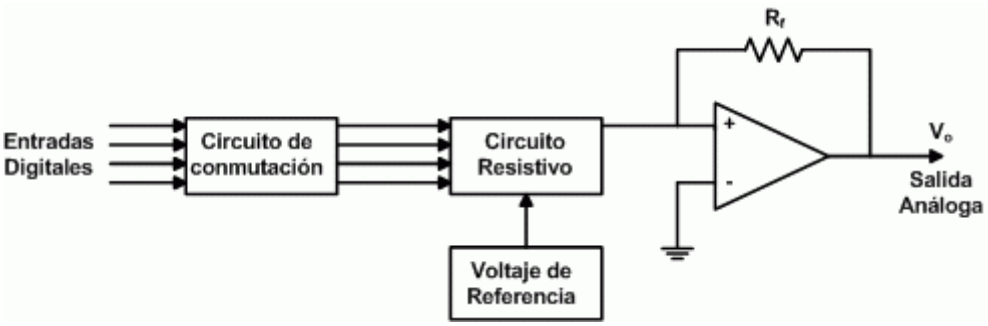


Figura 1.6 Elementos básicos de un convertidor D/A

La figura 1.7 muestra el circuito básico para un convertidor D/A de 3 bits. El amplificador operacional se emplea como un amplificador sumador. Las resistencias de la red están ponderadas en forma binaria y cada una se conecta mediante un interruptor electrónico al voltaje de referencia o a tierra así: cuando aparece un uno binario en el circuito de conmutación la resistencia queda conectada al voltaje de referencia y cuando aparece un cero queda conectada a tierra. Si la resistencia que corresponde a la rama del bit menos significativo (LSB) está conectada al voltaje de referencia $-V_r$, y las otros dos lo están a tierra, lo que corresponde al número binario 001, asumiendo que $R_f = R$, el voltaje de salida será:

$$V_o = \frac{R_f}{4R} V_r = \frac{V_r}{4} \qquad 1.9$$

Si a la entrada del convertidor se aplica el número binario 011, el circuito de conmutación conecta las resistencias correspondientes a los dos bits menos significativos al voltaje de referencia, en este caso el voltaje de salida será:

$$V_o = \left[\frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}\right] R_f V_r = \frac{3}{4} V_r \qquad 1.10$$

El máximo voltaje de salida se obtiene cuando las tres resistencias están conectadas al voltaje de referencia lo que corresponde al número binario 111, en este caso su valor será:

$$V_o = \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}\right] R_f V_r = \frac{7}{4} V_r \qquad 1.10$$

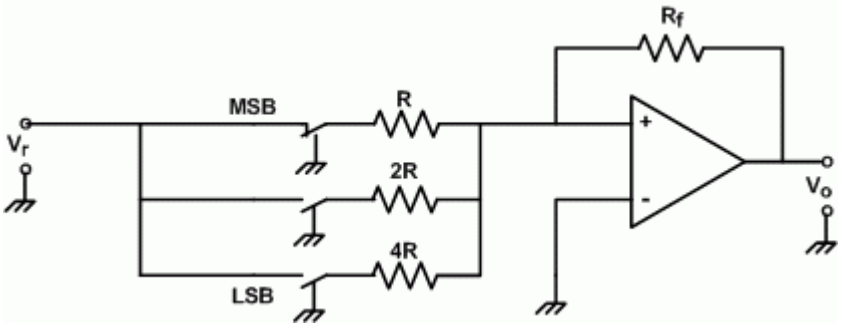


Figura 1.7 Convertidor D/A de tres bits

En la tabla 1.1 se dan los voltajes de salida del convertidor D/A mostrado en la figura 1.7 y correspondientes a las combinaciones posibles de los valores digitales de los tres bits de la entrada para un valor de escala plena (PE) de 10 V y un voltaje de referencia $V_r = 5\ V$

Si el convertidor D/A es de n bits y la resistencia correspondiente al MSB es R, entonces la resistencia correspondiente al LSB será $2^{n-1}R$. El voltaje de salida se calcula con la ecuación:

$$V_o = \left[\frac{a_o}{R} + \frac{a_1}{2R} + \frac{a_2}{4R} + \cdots \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}R}\right] R_f V_r \qquad 1.12$$

En donde a_0, a_1...a_{n-1}, toman el valor de uno ó cero según la entrada digital presente en el D/A.

Los parámetros más importantes en la operación de un convertidor D/A son: la resolución, la precisión, y el tiempo de establecimiento.

Resolución: Se define como el menor cambio que puede ocurrir en la salida análoga como resultado de un cambio en la entrada digital. Haciendo referencia a la tabla 1.1 se aprecia que la resolución es de 1.25 V.

Precisión: La precisión relaciona la salida real obtenida con la salida esperada y se especifica generalmente como un porcentaje de la salida a plena escala (PE).

Tiempo de establecimiento: se define como el tiempo que emplea la salida para alcanzar el 95% de su nuevo valor. Valores típicos de tiempo de establecimiento están en el rango de 50 ns y 100 us.

Tabla 1.1 Entrada binaria y Voltaje de salida para el convertidor D/A de 3 bits

$\boldsymbol{Entrada\ Digital}$	$\boldsymbol{Voltaje\ de\ salida\ V_o}$	$\boldsymbol{V_o\ \ Para\ PE = 10V}$
000	0.00	0.00
001	$\frac{R_f}{4R}V_r$	1.25
010	$\frac{R_f}{2R}V_r$	2.50
011	$\frac{3R_f}{4R}V_r$	3.75
100	$\frac{R_f}{R}V_r$	5.00
101	$\frac{5R_f}{4R}V_r$	6.25
110	$\frac{6R_f}{4R}V_r$	7.50
111	$\frac{7R_f}{4R}V_r$	8.75

1.6 CONVERTIDOR ANÁLOGO A DIGITAL (A/D)

El convertidor A/D transforma una señal análoga de voltaje o de corriente en una señal digital o una palabra codificada numéricamente. El convertidor A/D realiza sobre la señal de entrada operaciones de muestreo y retención, cuantificación y codificación.

En la operación de muestreo el dispositivo toma muestras de la señal cada T segundos, luego retiene el valor muestreado hasta que la conversión se complete.

El nivel de cuantificación corresponde al valor del bit menos significativo y está dado por:

$$Q = LSB = \frac{EP}{2^n} \qquad 1.13$$

En donde EP es el valor de voltaje a plena escala.

Existen diferentes tipos de convertidores A/D, los más utilizados son:

- Convertidor por A/D por aproximaciones sucesivas.
- Convertidores A/D de rampa digital
- Convertidores A/D de tipo paralelo.

En la figura 1.8 se muestra un diagrama del convertidor A/D del tipo aproximaciones sucesivas.

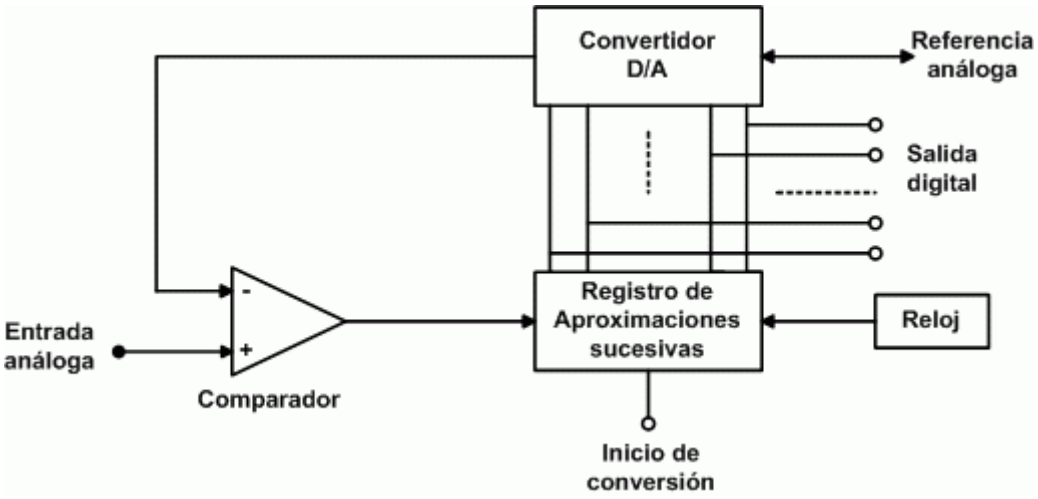


Figura 1.8 Diagrama de un convertidor A/D de aproximaciones sucesivas.

El principio de operación del convertidor A/D por aproximaciones sucesivas es el siguiente: inicialmente el registro de aproximaciones sucesivas pone en alto el MSB esto produce una salida con un valor igual a la mitad del voltaje máximo el cual es comparado con la entrada análoga. Como resultado de esta comparación el bit puede quedar en alto ó cambiar a bajo. Si el voltaje en la entrada análoga es mayor, el bit más significativo permanece en alto. A continuación se pone en alto

el bit dos y el voltaje de entrada análoga se compara ahora con los tres cuartos del voltaje máximo de salida del D/A. Se continúa así hasta que se completan las n comparaciones. La salida digital del registro de aproximaciones sucesivas indica los bits que se quedan en alto generando el código digital correspondiente a la entrada análoga aplicada al convertidor A/D.

1.7 SELECCIÓN DEL PERIODO DE MUESTREO

El periodo de muestreo T es un parámetro de diseño muy importante que debe seleccionarse en función de un compromiso entre varios factores:

- El tiempo de cálculo del procesador: Cuanto menor sea el periodo más potente debe ser el procesador, y por lo tanto más caro.
- Precisión numérica en la implementación: Cuanto menor sea el periodo más problemas de precisión y redondeo aparecen en la implementación, especialmente si se utiliza un procesador de coma fija. En ese caso no es conveniente tomar un periodo demasiado bajo comparado con la dinámica del proceso.
- Pérdida de información en el muestreo: Si el periodo es demasiado elevado comparado con la dinámica del proceso, se pierde mucha información de la señal muestreada, por lo que el comportamiento del sistema puede ser malo.
- Respuesta a perturbaciones: Entre una medición de la salida y la siguiente el proceso funciona en bucle abierto (*u* constante). Si actúa una perturbación su efecto no se podrá compensar hasta que se vuelva a medir la salida. Debido a esto para compensar perturbaciones es mejor un periodo de muestreo bajo.

En resumen, el periodo de muestreo debe seleccionarse para satisfacer un compromiso entre el deterioro de la calidad del control que puede producir un alto valor de T y la cantidad de cálculos necesaria para ejecutar el algoritmo de control con valores pequeños de T.

Existe un buen número de estudios sobre la elección del periodo de muestreo en el campo del procesamiento digital de señales. Esta elección depende de las características de la señal. Si se desea muestrear y reconstruir una señal $x(t)$ puede aplicarse el **Teorema de Shannon**, según el cual, si la frecuencia de muestreo es suficientemente alta, comparada con la componente de más alta frecuencia que se incluye en la señal de tiempo continuo, las características de amplitud de la señal de tiempo continuo se pueden preservar en la envolvente de la señal muestreada. Para reconstruir la señal original, a partir de una señal muestreada, existe una frecuencia mínima que la operación de muestreo debe satisfacer. Esta frecuencia mínima se especifica en el Teorema del Muestreo.

1.7.1 Teorema del Muestreo de Shannon: Si la frecuencia de muestreo w_S definida como $2\pi/T$, en donde T es el periodo de muestreo, es mayor que $2w_c$, es decir, si:

$$w_s \geq 2w_c \qquad 1.14$$

En donde w_c es la componente de más alta frecuencia presente en la señal de tiempo continuo $x(t)$ dicha señal se puede reconstruir completamente a partir de la señal muestreada $x^*(t)$. Se asume que la señal $x(t)$ no contiene componentes de frecuencia superiores a w_c como se indica en la figura 1.9 [1.5]

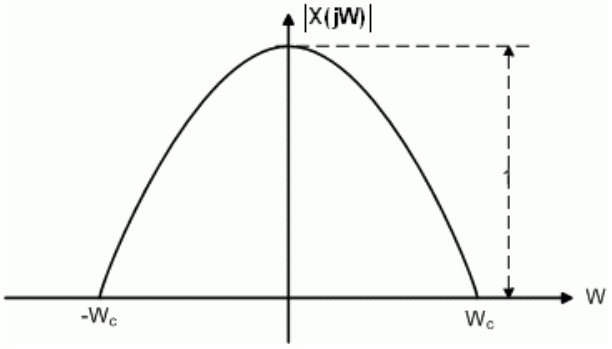


Figura 1.9 Un espectro de frecuencia. Ancho de banda ($-w_c$, w_c)

En la práctica, el periodo de muestreo se puede estimar tomando como base el ancho de banda del sistema en lazo cerrado o el tiempo de crecimiento o el tiempo de establecimiento requerido para la respuesta transitoria.

Como regla general, el sistema debe ser muestreado entre 8 y 12 veces durante un ciclo de la frecuencia amortiguada de la respuesta transitoria si el sistema es subamortiguado o entre 8 y 12 veces durante el tiempo de establecimiento de la respuesta si el sistema es sobreamortiguado. También, la frecuencia de muestreo puede estar entre 8 y 12 veces el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. Es importante tener presente que en lazo cerrado los procesos son normalmente más rápidos que en lazo abierto por lo tanto, se recomienda estimar el periodo de muestreo a partir de las características del sistema continuo en lazo cerrado.

Para estimar el periodo de muestreo se puede aplicar uno de los siguientes criterios:

- Si w_c es el ancho de banda del sistema en lazo cerrado, la frecuencia de muestreo se puede estimar dentro del intervalo:

$$8w_c \leq w_s \leq 2w_c \qquad T = \frac{2\pi}{w_s} \tag{1.15}$$

- El periodo de muestreo se puede evaluar a partir de la constante de tiempo equivalente del sistema en lazo cerrado tomando como base el criterio:

$$0.2\left(\tau_{eq} + \theta'\right) \leq T \leq 0.6\left(\tau_{eq} + \theta'\right) \tag{1.16}$$

En donde θ' es el retardo o tiempo muerto del sistema.

- Si t_s es el tiempo de establecimiento del sistema en lazo cerrado el periodo de muestreo puede seleccionarse dentro del intervalo:

$$0.05t_s \leq T \leq 0.15t_s \tag{1.17}$$

- Finalmente, se sugiere que el periodo de muestreo esté dentro del intervalo dado por:

$$0.0625T_u \leq T0.125T_u \tag{1.18}$$

En donde $T_u$es el periodo de oscilación del sistema en condiciones de estabilidad crítica. Para más detalles ver la sección 6.2.1. Como valor típico se puede tomar $T = 0.1T_u$ [1.6]

1.7.2 Aliasing o confusión de frecuencia: El fenómeno de aliasing o confusión de frecuencia se produce cuando se muestrea una señal sin tener en cuenta la condición del Teorema de Shannon, es decir, cuando se muestrea una señal a

una frecuencia menor que el doble de la más alta contenida en ella. Al intentar reconstruir la señal original se pueden obtener frecuencias que no contenía la señal original, es decir, se confunde una frecuencia f_1 con otra f_2, por ello a f_2 se le llama el alias de f_1.

$$f_{Alias} = |Múltiplo\ entero\ frec.\ de\ muestreo - frecuencia\ de\ la\ señal| \quad 1.19$$

Esta situación se hace visible en la figura 1.10, en la cual una señal de frecuencia $f_1 = 0.1Hz$ y otra de frecuencia $f_2 = 0.9Hz$ se muestrean a una frecuencia $f_S = 1Hz$. Como puede verse de la figura, ambas señales tienen los mismos valores a esta frecuencia de muestreo, es decir f_1 es un alias de f_2 a dicha frecuencia.

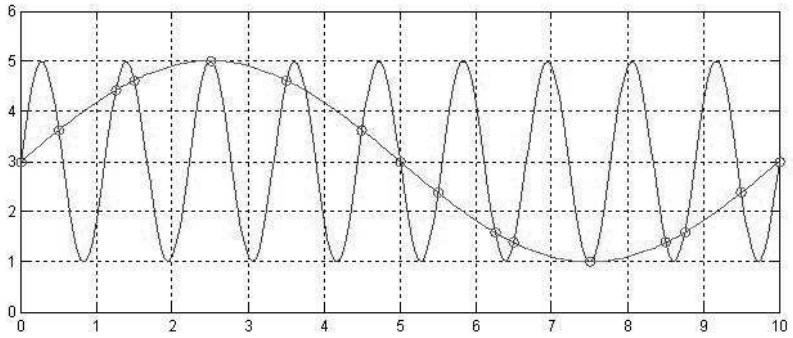


Figura 1.10 Aliasing

Si la señal que se muestrea tiene un ruido de alta frecuencia, el proceso de muestreo traslada esta componente de alta frecuencia a la zona de frecuencias bajas. El resultado es que la señal muestreada tiene un ruido de baja frecuencia que se debe al ruido de alta frecuencia de la señal continua original. Para evitar este efecto negativo es necesario interponer entre la señal continua (sensor) y el muestreador, un filtro análogo llamado filtro “antialiasing”. Este filtro elimina el ruido de alta frecuencia evitando el problema. En la mayoría de los casos basta con un filtro de primer orden, como un circuito RC como se muestra en la figura 1.11. La función de transferencia del filtro es:

$$G_f(S) = \frac{1}{RCS + 1} \qquad 1.19$$

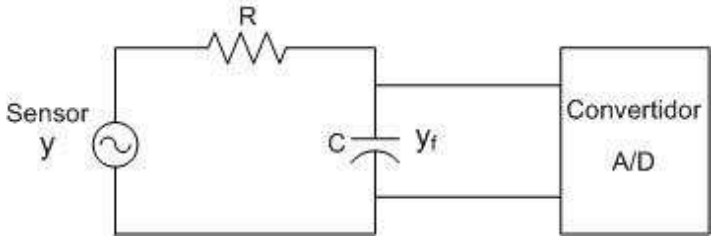


Figura 1.11 Filtro para antialiasing

El polo del filtro $(w_f = 1/RC)$ debe ser suficientemente mayor que los polos dominantes en bucle cerrado, pero suficientemente menor que la frecuencia del ruido. Una orientación puede ser:

$$5w_{BC} \leq w_f \leq \frac{w_{ruido}}{5} \qquad 1.19$$

En donde w_{BC} es frecuencia angular de los polos dominantes de lazo cerrado y w_{ruido} es la frecuencia del ruido.

EJEMPLO 1.2

Para el sistema de control de la figura 1.10 con $K = 1$, determine a) El ancho de banda del sistema en lazo cerrado b) El rango dentro del cual se puede seleccionar el periodo de muestreo utilice dos métodos diferentes. c) Elabore un programa en Matlab que resuelva el problema planteado. Los tiempos en s.

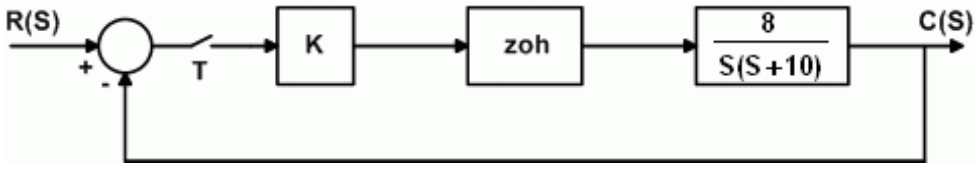


Figura 1.10 Sistema de control para el ejemplo 1.2

SOLUCIÓN:

a) La función de transferencia del sistema continuo en lazo cerrado es:

$$G_w(S) = \frac{G(S)}{1 + G(S)} \qquad G_w(S) = \frac{8}{S^2 + 10S + 8}$$

Haciendo $S = jw$ se obtiene, después de simplificar:

$$G_w(jw) = \frac{8}{(8 - w^2) + j10w} \qquad |G_w(jw)| = \frac{8}{\sqrt{(8 - w^2)^2 + 100w^2}}$$

Para $w = 0$ se obtiene: $|G_w(jw)| = 1$

El ancho de banda se w_c calcula haciendo $|G_w(jw_c)| = 0.707|G_w(0)|$

$$\frac{8}{\sqrt{(8 - w_c^2)^2 + 100w_c^2}} = 0.707$$

$$w_c^4 + 84w_c^2 - 64 = 0 \qquad w_c = 0.869\ rad/s$$

b) Según la ecuación 1.15 la frecuencia de muestreo w_c debe estar en el intervalo:

$$8w_c \leq w_s \leq 12 \qquad 6.95 \leq w_s \leq 10.42\ rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{w_s} \qquad 0.602 \leq T \leq 0.903\ s.$$

Utilizando el criterio de la constante de tiempo equivalente en lazo cerrado:

$$0.2\left(\tau_{eq} + \theta'\right) \leq T \leq 0.6\left(\tau_{eq} + \theta'\right)$$

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado corresponde a la de un sistema de segundo orden para el cual:

$$w_n^2 = 8 \qquad w_n = 2.82\ rad/s$$

$$2\xi w_n = 10 \qquad \xi = 1.77 \qquad \tau_{eq} = \frac{2\xi}{w_n} = 1.25\ s.$$

El rango para el periodo de muestreo es, entonces: $0.25 \leq T \leq 0.75\ s.$

c) Programa en Matlab

```
% Programa para calcular el periodo de muestreo  utilizando el criterio del ancho
% de banda a partir de la función de transferencia del proceso en lazo abierto.
clc
n=input('ENTRE EL NUMERADOR DEL SISTEMA=');
d=input('ENTRE EL DENOMINADOR DEL SISTEMA=');
```

```
[nw,dw]=cloop(n,d,-1);
[mag,fase,w]=bode(nw,dw);
mag1=mag(1,1);
mag2=0.707*mag1;            %Calcula el valor de la magnitud para wc
wc=interp1(mag,w,mag2,'spline');
wmin=8*wc;
wmax=12*wc;
Tmin=2*pi/wmax;
Tmax=2*pi/wmin;
fprintf(' RANGO PARA EL PERIODO : Tmin=%3.2f   Tmax=%3.2f',Tmin, Tmax)
```

EJEMPLO 1.3

Suponiendo que una señal de 25 Hz con componentes de ruidos en 60, 150 y 510 Hz, se muestrea a una frecuencia de 100 Hz. Que frecuencias alias se producen en el proceso de muestreo?

SOLUCIÓN:

Según el teorema de Shannon la mínima frecuencia de muestreo para la señal es de 50 Hz, por lo que las componentes inferiores a esta frecuencia se muestrean correctamente desde el punto de vista frecuencial. Pero las frecuencias superiores a 50 Hz producen frecuencias alias de valor:(Ver ecuación 1.19)

Para 60 Hz: $f_{Alias} = |100 - 60| = 40\,Hz$

Para 150 Hz: $f_{Alias} = |2\,(100) - 150| = 50\,Hz$

Para 510 Hz: $f_{Alias} = |5\,(100) - 510| = 10\,Hz$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.1 Las funciones que se dan a continuación son muestreadas cada T segundos. Determine la salida del muestreador $x^*(t)$ para cada una de ellas.

$a)\ x(t) = 2t \qquad T = 0.5\ s.$

$b)\ x(t) = sen(4t) \qquad T = \pi/10\ s.$

$c)\ x(t) = tsen(2t) \qquad T = 0.5\ s.$

$d)\ x(t) = e^{-2t}sen(4t) \qquad T = 0.2\ s.$

$e)\ x(t) = 3te^{-2t} \qquad T = 0.2\ s.$

$f)\ x(t) = e^{-(t-T)}u(t-T) \qquad T = 0.2\ s.$

1.2 Asuma que la entrada $x(t)$ al sistema de la figura 1.11 está dada por las funciones del problema 1.1. Obtenga y grafique la salida $y(t)$ del retenedor.

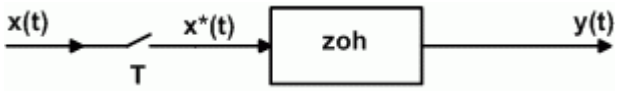


Figura 1.11 Sistema para el problema 1.2

1.3 Las funciones de transferencia de lazo abierto de ciertos sistemas de control con realimentación unitaria, están dadas por:

$a)\ G_p(S) = \dfrac{5}{8S+1}$ $d)\ G_p(S) = \dfrac{2}{S(S+0.5)}$ $g)\ G_p(S) = \dfrac{S+0.8}{S(S+2)}$

$b)\ G_p(S) = \dfrac{4e^{-0.5S}}{4S+1}$ $e)\ G_p(S) = \dfrac{3}{(S+2)(S+5)}$ $h)\ G_p(S) = \dfrac{S}{S^2+3S+9}$

$c)\ G_p(S) = \dfrac{1}{S}$ $f)\ G_p(S) = \dfrac{0.5S}{(s+0.1)(S+0.2)}$

Determine el ancho de banda de cada uno de los sistemas en lazo cerrado y estime, a partir del resultado obtenido, el intervalo dentro del cual se puede seleccionar el periodo de muestreo. Resuelva el mismo problema tomando como base el tiempo de establecimiento del sistema en lazo cerrado.

1.4 La figura 1.12 representa el diagrama de flujo tecnológico de instrumentación de un sistema de control de nivel de líquido. Se utiliza un controlador proporcional con ganancia K_c. La válvula tiene ganancia 2 y constante de tiempo de 0.1 min. El sistema de medición del nivel tiene ganancia unitaria y constante de tiempo de 0.05 min. El proceso de nivel, una vez linealizado, se puede aproximar a un sistema de primer orden con ganancia 0.8 y constante de tiempo igual a 0.6 min. a) Dibuje el diagrama de bloques correspondiente al sistema. b) Estime el ancho de banda del sistema en lazo cerrado con $K_c = 1$, $K_c = 2$ y $K_c = 4$. Que conclusiones se pueden sacar al respecto?

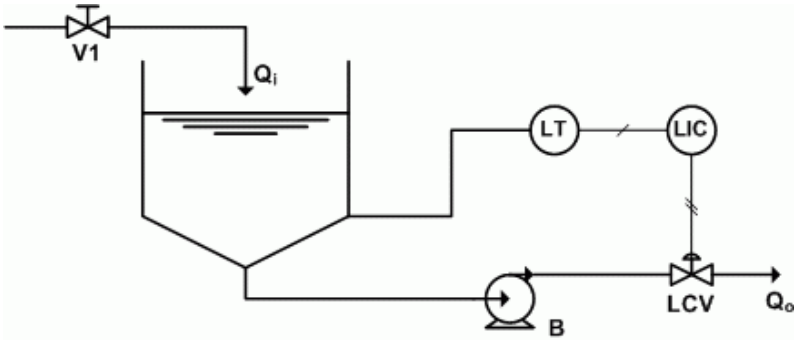


Figura 1.12 Control de nivel

1.5 Para cada una de las funciones que se dan a continuación, determinar a) $f^*(t)$ b) $F^*(s)$.

$a)\ f(t) = e^{-4t} - 4t \qquad T = 0.1\ s.$

$b)\ f(t) = e^{-t}cos(2t) \qquad T = 0.2\ s.$

$c)\ f(t) = e^{-t} - sen(2t) \qquad T = 0.2\ s.$

$d)\ f(t) = e^{-2t} - e^{2t} \qquad T = 0.2\ s.$

$e)\ f(t) = sen(2t) + cos(2t) \qquad T = 0.2\ s.$

$f)\ f(t) = t^2 - t - 4 \qquad T = 1\ s.$

1.6 Para cada uno de los sistemas de control que se dan en la figura 1.13 con $D(z) = 1$, calcular: a) el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. b) El intervalo dentro del cual puede seleccionarse el periodo de muestreo.

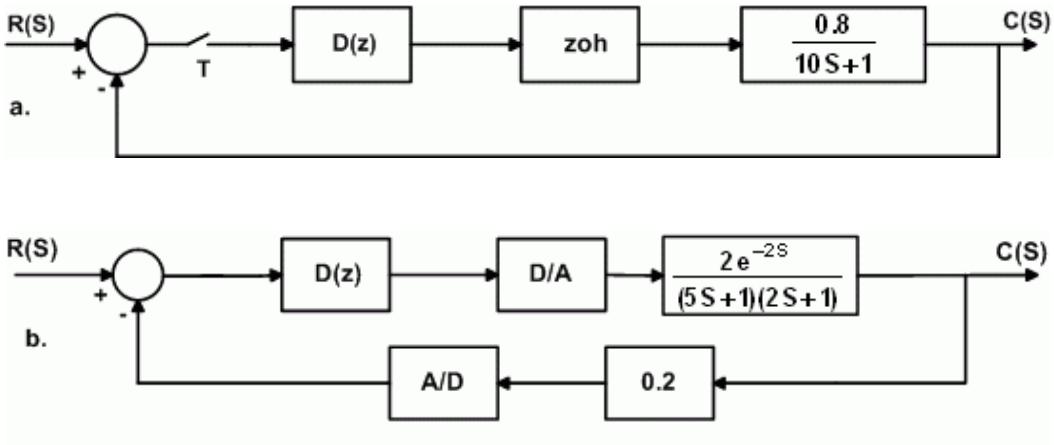


Figura 1.13 Sistemas de control para el problema 1.6

1.7 Para los sistemas de control de la figura 1.13 calcular: a) La constante de tiempo y el tiempo de establecimiento del sistema continuo en lazo cerrado. b) Con los resultados obtenidos en el literal anterior, estime el rango dentro del cual puede seleccionarse el periodo de muestreo.

1.8 Un generador de señales produce un voltaje $v = A.sen(wt)$. Si la señal se muestrea cada T seg y se observa un valor constante, cual es el valor mas pequeño de T para que esto sea posible?

1.9 A un convertidor D/A de 12 bits de aproximaciones sucesivas y con escala plena de 10 V se le aplican a su entrada las señales digitales que se dan en la tabla 1.2. Calcule para cada una de ellas el valor del voltaje que se obtiene en la salida del convertidor.

Tabla 1.2 Señales de entrada digitales para el convertidor D/A

Entrada Binaria	***Salida Análoga***	***Entrada Binaria***	***Salida Análoga***
000000000001		100001000110	
000000000010		100000000011	
000000000100		111100000000	
000000001000		101010101010	
111000010101		111010111011	
111111100111		100000000000	

1.10 La señal:

$$x(t) = x_1(t)\sin(2\pi t) + x_2(t)\sin(20\pi t)$$

Se hace pasar por el sistema muestreador-retenedor de la figura 1.14. Si el periodo de muestreo es $T = 0.2\,s$. a) Obtenga y grafique la salida $x^*(t)$ del muestreador. b) Obtenga y grafique la salida $y(t)$ del sistema. c) Cual es la frecuencia de la señal a la salida del muestreador? d) Resuelva el problema si el

periodo de muestreo es $T = 1\ s$. Que conclusiones se pueden obtener a partir de los resultados?

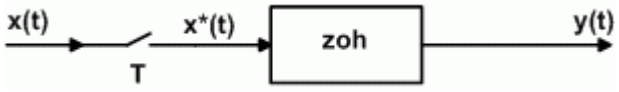


Figura 1.14 Sistema muestreador-retenedor para el problema 1.11

1.11 Un disco marcado con un punto, situado a una distancia R de su centro, gira a razón de 512 Rev/s y es iluminado por un estroboscopio que produce 2^N destellos por segundo. Cual es el menor valor entero de N que muestra que el disco está girando?

1.12 Cuales son las principales razones para que se presente pérdida de información y se generen errores en la reconstrucción de una señal continua que ha sido previamente muestreada?

REFERENCIAS

[1.1] Ogata, Katsuhico. *Sistemas de Control en tiempo discreto*. Prentice Hall.1996

[1.2] Creus Sole, Antonio. *Instrumentación Industrial*. Marcombo Boixareu Editores. 1989.

[1.3] Kuo, Benjamín. *Digital Control Systems.* Saunders Collage Publishing. 1992.

[1.4] Phillips C, Nagle T. *Digital Control Systems Analysis and Design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs.1995

[1.5] Ogata, Katsuhico. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall.

[1.6] Warwick, K. Rees, *Industrial Digital Control Systems*. IEEE Control Engineering. Series 37. 1988.

CAPITULO 2

INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA Z

La transformada z, en sistemas discretos en el tiempo, desempeña un papel muy similar al de la transformada de Laplace en los sistemas continuos en el tiempo.
La transformada de Laplace de una función $x(t)$, está definida como:

$$X(S) = F(S) = \int_0^\infty x(t)e^{-St}\,dt \qquad 2.1$$

Cualquier función continua $x(t)$, muestreada periódicamente, se puede expresar matemáticamente, para $t \geq 0$, mediante la ecuación:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \qquad 2.2$$

Si se desarrolla la sumatoria planteada en la ecuación anterior se obtiene:

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t - T) + x(2T)\delta(t - 2T) + \cdots \qquad 2.3$$

Al tomar la transformada de Laplace a la última expresión resulta:

$$X^*(S) = x(0) + x(T)e^{-TS} + x(2T)e^{-2TS} + \cdots$$

Es decir:

$$X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS} \qquad 2.4$$

Si se introduce ahora una nueva variable z definida como [2.1]:

$$z = e^{TS} \qquad o \qquad S = \frac{1}{T}\ln(z)$$

La ecuación 2.4 se puede escribir en la siguiente forma:

$$X^*(S)\big|_{S=\frac{1}{T}\ln(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \qquad 2.5$$

Haciendo ahora:

$$X^*(S)\big|_{S=\frac{1}{T}\ln(z)} = X(z)$$

Se obtiene:

$$X(z) = \Im[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \qquad 2.6$$

La ecuación 2.6 se define como la transformada z de la función continua $x(t)$.

Así mismo, para una secuencia de números $x(k)$, la transformada z es:

$$X(z) = \Im[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \qquad 2.7$$

2.1 TRANSFORMADA Z DE FUNCIONES SENCILLAS

2.1.1 Transformada z de la función escalón unitario: Esta función se define como:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Por definición:

$$X(z) = \Im[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \qquad \text{Pero:} \qquad x(kT) = 1$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

2.1.2 Transformada z de la función rampa: Esta función se define como:

$$x(t) = \begin{cases} At & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

En este caso: $x(kT) = AkT$ para $k = 0,1,2 \ldots$, entonces:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} AkTz^{-k} = AT\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

$$X(z) = AT(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots) = ATz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots)$$

$$X(z) = \frac{ATz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{ATz}{(z - 1)^2}$$

2.1.3 Transformada z de la función exponencial: Esta función se define como:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}\, z^{-k}$$

$$X(z) = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + e^{-3aT}z^{-3} + \cdots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

2.1.4 Transformada z de la función polinomial: Esta función se define como:

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Aplicando la ecuación 2.7:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}$$

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^2z^{-2} + \cdots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Tabla 2.1 Transformada z de funciones prácticas

Nº	$f(t)$ F. Continua	$f(kT)$ F. Discreta	$F(S)$ T. de Laplace	$F(z)$ Transformada z
1	$\delta(t)$	$\delta(kT)$	1	1
2	$u(t)$	$u(kT)$	$\frac{1}{S}$	$\frac{z}{z-1}$
3	t	kT	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	t^2	$(kT)^2$	$\frac{2}{S^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	t^3	$(kT)^3$	$\frac{6}{S^4}$	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
6	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{S+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
7	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{1}{(S+a)^2}$	$\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$
8	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{2}{(S+a)^3}$	$\frac{T^2e^{-aT}z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
9	$sin(bt)$	$sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{zsin(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$
10	$cos(bt)$	$cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z^2-zcos(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$
11	$e^{-at}sin(bt)$	$e^{-akT}sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT}sinbT}{z^2-2ze^{-aT}cosbT+e^{-2aT}}$
12	$e^{-at}cos(bt)$	$e^{-akT}cos(bkT)$	$\frac{S+a}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}cosbT}{z^2-2ze^{-aT}cosbT+e^{-2aT}}$
13	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{a}{S(S+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
14	$1-(1+at)e^{-at}$	$1-(1+akT)e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S(S+a)^2}$	$\frac{1}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})}$
15	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{b-a}{(S+a)(S+b)}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
16	$be^{-bt}-ae^{-at}$	$be^{-bkT}-ae^{-akT}$	$\frac{(b-a)S}{(S+a)(S+b)}$	$\frac{[(b-a)z-(be^{-aT}-ae^{-bT})]z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$

Tabla 2.1 Transformada z de Funciones Prácticas (Continuación)

Nº	$f(t)$ F. Continua	$f(kT)$ F. Discreta	$F(S)$ T. de Laplace	$F(z)$ Transformada z
17	$(1-at)e^{-aT}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{S}{(S+a)^2}$	$\frac{[z-(1+aT)e^{-aT}]z}{(z-e^{-aT})^2}$
18	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S^2(S+a))}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
19		a^k		$\frac{z}{z-a}$
20		$a^{k-1} \quad k \geq 1$		$\frac{1}{z-a}$
21		ka^{k-1}		$\frac{z}{(z-a)^2}$
22		k^2a^{k-1}		$\frac{z(z+a)}{(z-a)^3}$
23		k^3a^{k-1}		$\frac{z(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$
24		$(-a)^k$		$\frac{z}{z+a}$
25		$a^k cos(k\pi)$		$\frac{z}{z+a}$
26		$k(k-1)a^{k-2}$		$\frac{2z}{(z-a)^3}$
27		$k(k-1)\cdots(k-m+2)$		$\frac{z(m-1)!}{(z-1)^m}$
28	$\frac{1}{S(S+a)(S+b)}$ $A=\frac{b(1-e^{-aT})-a(1-b^T)}{ab(b-a)}$		$\frac{(Az+B)z}{(z-1)(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$ $B=\frac{ae^{-aT}(1-e^{-bT})-be^{bT}(1-e^{-aT})}{ab(b-a)}$	
29	$1-e^{-at}(cosbt+\frac{a}{b}sinbt)$	$\frac{a^2+b^2}{S[(S+a)^2+b^2]}$	$\frac{(Az+B)z}{(z-1)(z^2-2ze^{-aT}cosbT+e^{-2aT})}$	
	$A=1-e^{-aT}cosbT-\frac{a}{b}e^{-aT}sinbT$		$B=e^{-2aT}+\frac{a}{b}e^{-aT}sinbT-e^{-aT}cosbT$	

.

EJEMPLO 2.1

Aplicando la definición de transformada z, hallar la transformada z de la función descrita por:

$$x(t) = te^{-at} \qquad t \geq 0$$

SOLUCIÓN:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kTe^{-akT} z^{-k} = T\sum_{k=0}^{\infty} Ke^{-akT} z^{-k}$$

$$X(z) = T(e^{-aT}z^{-1} + 2e^{-2aT}z^{-2} + 3e^{-3aT}z^{-3} + \cdots)$$

$$X(z) = Te^{-aT}z^{-1}(1 + 2e^{-aT}z^{-1} + 3e^{-2aT}z^{-2} + \cdots)$$

$$X(z) = \frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^2} = \frac{Te^{-aT}z}{(z - e^{-aT})^2}$$

EJEMPLO 2.2

Hallar la transformada z de:

$$X(S) = \frac{4}{S(S+4)}$$

SOLUCIÓN: Cuando se da una función en términos de S y se desea evaluar su transformada z, se puede transformar $X(S)$ en $x(t)$ y hallar la transformada z de $x(t)$. Ahora bien, si se dispone de una tabla de transformada z, se puede expandir $X(S)$ en fracciones parciales y utilizando la tabla se evalúa $X(z)$.

Para el ejemplo propuesto:

$$X(S) = \frac{4}{S(S+4)} = \frac{1}{S} - \frac{1}{S+4}$$

De tablas:

$$\Im\left\{\frac{1}{S}\right\} = \frac{z}{z-1} \qquad \Im\left\{\frac{1}{S+4}\right\} = \frac{z}{z - e^{-4T}}$$

Es decir:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-4T}} = \frac{(1 - e^{-4T})z}{(z-1)(z - e^{-4T})}$$

La ubicación del polo $z - e^{-4T}$, depende del valor del periodo de muestreo.

2.2 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

El uso de las propiedades de la transformada z facilita la evaluación de la transformada z de una función así como el análisis de sistemas de control en tiempo discreto [2.2].

2.2.1 Multiplicación por una constante: Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, entonces:

$$\Im\{ax(t)\} = a\Im\{x(t)\} = aX(z) \tag{2.8}$$

Demostración:

$$\Im\{ax(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} ax(kT)z^{-k} = a\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = aX(z)$$

2.2.2 Propiedad de Linealidad: Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$ e $Y(z)$ es la transformada z de $y(t)$, entonces:

$$\Im\{ax(t) + by(t)\} = aX(z) + bY(z) \tag{2.9}$$

Demostración:

$$\Im\{ax(t) + by(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\{ax(kT) + by(kT)\}x^{-k} = a\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} + b\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k}$$

$$\mathfrak{I}\{ax(t) + by(t)\} = aX(z) + bY(z)$$

2.2.3 Multiplicación por a^k: Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, entonces:

$$\Im\{a^k x(t)\} = X\left(\frac{z}{a}\right) \tag{2.10}$$

Demostración:

$$\Im\{a^k x(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

2.2.4 Propiedad de Traslación: Si se tiene que $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$ y que $x(t) = 0$ para $t < 0$, entonces:

$$\Im\{x(t - nT)\} = z^{-n}X(z) \tag{2.11}$$

$$\Im\{x(k + n)\} = z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1}x(T) - \cdots zx\big((n-1)T\big) \tag{2.12}$$

$$\Im\{x(t+nT)\} = z^n\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right] \qquad 2.13$$

Siendo $n = 1, 2, 3$ ...

Demostración:

Para demostrar 2.11 se tiene:

$$\Im\{x(t-nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k} = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x[T(k-n)]\, z^{-(k-n)}$$

Haciendo $k - n = m$ resulta qué:

$$\Im\{x(t-nT\} = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x[(mT)]\, z^{-m} = z^{-n}X(z)$$

EJEMPLO 2.3

Hallar la transformada z de la función: $x(t) = 4u(t-3T)$

SOLUCIÓN: En este caso se aplica la propiedad de traslación y la propiedad de multiplicación por una constante.

$$X(z) = \Im\{4u(t-3T)\} = 4\Im\{u(t-3T)\} = 4z^{-3}\Im\{1\}$$

$$X(z) = 4z^{-3}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{4}{z^2(z-1)}$$

EJEMPLO 2.4

Hallar la transformada z de la función: $x(t) = tu(t+3T)$

SOLUCIÓN: De acuerdo con la ecuación 2.12 se tiene:

$$\Im\{tu(t+3T)\} = z^3\left\{\Im[t] - \sum_{k=0}^{2} kTz^{-k}\right\}$$

$$\Im\{tu(t+3T)\} = z^3\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T}{z} - \frac{2T}{z^2}\right]$$

2.2.5 Propiedad de la Traslación Compleja: Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, entonces:

$$\Im\{e^{-at}x(t)\} = X(ze^{aT}) \qquad 2.14$$

Demostración:

$$\Im\{e^{-at}x(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[ze^{aT}]^{-k}$$

Por lo tanto:

$$\Im\{e^{-at}x(t)\} = X(ze^{aT})$$

EJEMPLO 2.5

Hallar la transformada z de la función: $x(t) = t^2e^{-3t}$

SOLUCIÓN: Utilizando la tabla de transformada z se obtiene:

$$\Im\{t^2\} = \frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$\Im\{t^2e^{-3t}\} = X(ze^{aT}) = X(ze^{3T})$$

Reemplazando a z por ze^{3T} resulta:

$$\Im\{t^2e^{-3t}\} = \frac{T^2e^{3T}z(ze^{3T}+1)}{(ze^{3T}-1)^3}$$

2.2.6 Teorema del Valor Inicial: Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, el valor inicial, $x(0)$ de $x(t)$ ó de $x(k)$ está dado por:

$$x(0) = \lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{z\to\infty} X(z) \qquad 2.15$$

Demostración: De acuerdo con la definición de transformada z:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots$$

Tomando el límite cuando $z \to \infty$ se obtiene:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{t\to 0} x(t)$$

2.2.7 Teorema del Valor Final: Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, el valor $x(\infty)$ de $x(t)$ está dado por:

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) \qquad 2.16$$

Demostración: Por definición, la transformada z de $x(k)$ y de $x(k+1)$ son:

$$\Im\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \qquad \Im\{x(k+1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k}$$

Restando las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\Im\{x(k+1)\} - \Im\{x(k)\} = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k==}^{n} x(k+1)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n} x(k)z^{-k}\right]$$

$$\Im\{x(k+1) - x(k)\} = x(1) + x(2)z^{-1} + \cdots x(n+1)z^{-n} - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} \cdots - x(n)z^{-n}$$

$$\Im\{x(k+1) - x(k)\} = \lim_{n\to\infty}[-x(0) + (1 - z^{-1})x(1) + z^{-1}(1 - z^{-1})x(2) + \cdots z^{-n}(z-1)x(n) + z^{-n}x(n+1)]$$

Tomando el límite de la ecuación anterior cuando $z \to 1$ se obtiene:

$$\lim_{z\to 1}[\Im\{x(k+1) - x(k)\}] = \lim_{z\to 1}[x(n+1) - x(0)]$$

Teniendo en cuenta el teorema de la translación real:

$$\Im\{x(k+1)\} - \Im\{x(k)\} = zX(z) - zx(0) - X(z) = (z-1)X(z) - zx(0)$$

De las ecuaciones dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

EJEMPLO 2.6

Determinar el valor inicial y el valor final de la función cuya transformada z está dada por:

$$X(z) = \frac{(1 - e^{-3T})z}{(z-1)(z - e^{-3T})}$$

SOLUCIÓN: a) Para el valor inicial se tiene:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{(1 - e^{-3T})z}{(z-1)(z - e^{-3T})} = 0$$

b) Para el valor final se tiene:

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\,X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{(1 - e^{-3T})z}{(z-1)(z - e^{-3T})} = 1$$

En efecto, la función $x(t)$ correspondiente a la función $X(z)$ es: $x(t) = 1 - e^{-3t}$ por lo tanto:

$$x(0) = \lim_{t\to 0}(1 - e^{-3t}) = 0 \qquad x(\infty) = \lim_{t\to \infty}(1 - e^{-3t}) = 1$$

En la tabla 2.2 se dan algunas de las propiedades fundamentales de la transformada z.

Tabla 2.2 Propiedades de la Transformada z

Nº	$x(t)$ ó $x(kT)$	Transformada z
1	$ax(t)$	$aX(z)$
2	$ax(t) + by(t)$	$aX(z) + bY(z)$
3	$x(t+T)$ ó $x(k+1)$	$zX(z) - zx(0)$
4	$x(t+2T)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(T)$
5	$x(k+2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$
6	$x(t+kT)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(T) - \cdots zx(kT-T)$
7	$x(t-k)$	$z^{-k}X(z)$
8	$x(n+k)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(1) - \cdots zx(k-1)$
9	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
10	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{-aT})$
11	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^{a})$
12	$a^kx(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
13	$tx(t)$	$-T\frac{d[X(z)]}{dz}$
14	$x(0)$	$\lim_{z\to\infty} X(z)$
15	$x(\infty)$	$\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$

2.3 TRANSFORMADA Z INVERSA

La transformada z inversa de una función $X(z)$ da como resultado la función muestreada $x^*(t)$ y no la función continua $x(t)$. Es decir, al evaluar la

transformada z inversa se obtienen los valores de la función $x(k)$ en los instantes de muestreo para $k = 0, 1, 2\cdots$ .En consecuencia, la función muestreada $x(k)$ obtenida a partir de la transformada z inversa es única pero, es posible que exista más de una función continua $x(t)$ a partir de la cual se pueda derivar la misma función $x(k)$ [2.3].

La notación para la transformada z inversa de una función $X(z)$ es:

$$x(k) = \Im^{-1}\{X(z)\} \qquad 2.17$$

Existen diferentes métodos para evaluar la transformada z inversa, entre ellos están:

- Método de la división larga o método directo.
- Método de la expansión en fracciones parciales.
- Método de la integral de inversión.
- Método computacional.

2.3.1 Método de la división larga: Con éste método se obtiene la transformada z inversa expandiendo a $X(z)$ en una serie infinita de potencias en z^{-1}. El coeficiente del término en z^{-n} corresponde al valor de la función $x(k)$ en el enésimo instante de muestreo, este hecho se puede ver claramente si se escribe la ecuación que define a la transformada z como una serie de potencias como se indica a continuación:

$$X(z) = \Im\{x(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)x^{-k} = x(0) + x(t)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + \cdots \qquad 2.18$$

EJEMPLO 2.7

Hallar la transformada z inversa de:

$$X(z) = \frac{(z+2)(z-1)}{(z+1)(z+3)(z-2)}$$

SOLUCIÓN: $X(z)$ se debe escribir en la forma:

$$X(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2} - 2z^{-3}}{1 + 2z^{-1} - 5z^{-2} - 6z^{-3}}$$

La división se realiza así:

$$\begin{array}{l|l} z^{-1}+z^{-2}-2z^{-3} & 1+2z^{-1}-5z^{-2}-6z^{-3} \\ \hline -z^{-1}-2z^{-2}+5z^{-3}+6z^{-4} & z^{-1}-z^{-2}+5z^{-3}-9z^{-4}+37z^{-5} \\ \hline \quad -z^{-2}+3z^{-3}+6z^{-4} & \\ \quad z^{-2}+2z^{-3}-5z^{-4}-6z^{-5} & \\ \hline \quad 5z^{-3}+\quad z^{-4}-6z^{-5} & \\ \quad -5z^{-3}-10z^{-4}+25z^{-5}+30z^{-6} & \\ \hline \quad -9z^{-4}+19z^{-5}+30z^{-6} & \\ \quad 9z^{-4}+18z^{-5}-45z^{-6}-54z^{-7} & \\ \hline \quad 37z^{-5}-15z^{-6}-54z^{-7}\cdots & \end{array}$$

$$X(z) = z^{-1} - z^{-2} + 5z^{-3} - 9z^{-4} + 37z^{-5}$$

La transformada z inversa es, entonces:

$x(0) = 0 \qquad x(3) = 5$

$x(1) = 1 \qquad x(4) = -9$

$x(2) = -1 \qquad x(5) = 37\ldots$

2.3.2 Método de expansión en fracciones parciales: Este método requiere que todos los términos de la expansión en fracciones parciales se puedan encontrar en una tabla de pares de transformada z.

El método consiste en expandir la función $X(z)$ en fracciones parciales si $X(z)$ no tiene ceros en el origen ó $X(z)/z$ si $X(z)$ tiene ceros en el origen, de modo que a cada una de ellas se le pueda evaluar su transformada z inversa, a partir de una tabla de transformada z.

Sea:

$$X(z) = \frac{b_o z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots b_m z}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)} \qquad 2.19$$

Si $b_m = 0$ la función se puede expandir en fracciones parciales así:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \cdots \frac{a_n}{z-p_n}$$

En donde:

$$a_i = (z - p_i)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=p_i}$$

EJEMPLO 2.8

Hallar la transformada z inversa de:

$$X(z) = \frac{(z+2)(z-1)}{(z+1)(z+3)(z-2)}$$

SOLUCIÓN: Como $X(z)$ no tiene ceros en el origen, se expande $X(z)$ en fracciones parciales.

$$X(z) = \frac{(z+2)(z-1)}{(z+1)(z+3)(z-2)} = \frac{a_1}{z+1} + \frac{a_2}{z+3} + \frac{a_3}{z-2}$$

$$a_1 = (z+1)X(z)\big|_{z=-1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = (z+3)X(z)\big|_{z=-3} = \frac{2}{5}$$

$$a_3 = (z-2)X(z)\big|_{z=2} = \frac{4}{15}$$

$$X(z) = \frac{1/3}{z+1} + \frac{2/5}{z+3} + \frac{4/15}{z-2}$$

Utilizando tablas de transformada z se encuentra que:

$$x(k) = \frac{1}{3}(-1)^{k-1} + \frac{2}{5}(-3)^{k-1} + \frac{4}{15}(2)^{k-1}$$

Para diferentes valores de k se obtiene:

$x(0) = 0$ $\quad$ $x(3) = 5$

$x(1) = 1$ $\quad$ $x(4) = -9$

$x(2) = -1$ $\quad$ $x(5) = 37$

EJEMPLO 2.9

Hallar la transformada z inversa de:

$$X(z) = \frac{z(z+0.5)(z+0.8)}{(z-0.2)(z-0.8)(z-1)}$$

SOLUCIÓN: En este caso $X(z)$ tiene un cero en el origen. Entonces se expande $X(z)/z$ en fracciones parciales.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z(z+0.5)(z+0.8)}{(z-0.2)(z-0.8)(z-1)} = \frac{a_1}{(z-0.2)} + \frac{a_2}{(z-0.8)} + \frac{a_3}{(z-1)}$$

$$a_1 = (z-0.2)\frac{x(z)}{z}\Big|_{z=0.2} = \frac{35}{24} \qquad a_2 = (z-0.8)\frac{x(z)}{z}\Big|_{z=0.8} = -\frac{52}{3}$$

$$a_3 = (z-1)\frac{x(z)}{z}\Big|_{z=1} = \frac{135}{8}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{35}{24}\left[\frac{1}{(z-0.2)}\right] - \frac{52}{3}\left[\frac{1}{(z-0.8)}\right] + \frac{135}{8}\left[\frac{1}{(z-1)}\right]$$

$$X(z) = \frac{35}{24}\left[\frac{z}{(z-0.2)}\right] - \frac{52}{3}\left[\frac{z}{(z-0.8)}\right] + \frac{135}{8}\left[\frac{z}{(z-1)}\right]$$

Utilizando la tabla de transformada z se obtiene:

$$x(k) = \frac{35}{24}(0.2)^k - \frac{52}{3}(0.8)^k + \frac{135}{8}(1)^k \qquad k \geq 0$$

Entonces:

$x(0) = 0.00$ $\quad x(2) = 3.30$ $\quad x(4) = 8.012$ $\quad x(6) = 11.195$

$x(1) = 1.00$ $\quad x(3) = 5.84$ $\quad x(5) = 9.777$ $\quad x(\infty) = 16.875$

NOTA: Si $X(z)$ tiene un polo de multiplicidad r es decir, si $X(z)$ es de la forma:

$$X(z) = \frac{N(z)}{(z-p_1)(z-p_2)^r} \qquad 2.20$$

Su expansión en fracciones parciales se puede escribir como:

$$X(z) = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_{21}}{z-p_2} + \frac{a_{22}}{(z-p_2)^2} + \cdots \frac{a_{2r}}{(z-p_2)^r} \qquad 2.21$$

En donde:

$$a_1 = (z-p_1)X(z)|_{z=p_1} \qquad 2.22$$

$$a_{2j} = \frac{1}{(r-j)!}\frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}}[(z-p_2)^2 X(z)]_{z=p_2} \qquad 2.23$$

EJEMPLO 2.10

Hallar la transformada z inversa de:

$$X(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^2}$$

SOLUCIÓN: La expansión en fracciones parciales de $X(z)$ es de la forma:

$$X(z) = \frac{a_{11}}{z} + \frac{a_{12}}{z^2} + \frac{a_{13}}{z^3} + \frac{a_{21}}{z-1} + \frac{a_{22}}{(z-1)^2}$$

$$a_{11} = \frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}[z^3X(z)]_{z=0} = 3 \qquad a_{21} = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}[(z-1)^2X(z)]_{z=1} = -3$$

$$a_{12} = \frac{1}{(3-2)!}\frac{d}{dz}[z^3X(z)]_{z=0} = 2 \qquad a_{22} = \frac{1}{(2-2)!}[(z-1)^2X(z)]_{z=1} = 1$$

$$a_{13} = \frac{1}{(3-3)!}[z^3X(z)]_{z=0} = 1$$

Por lo tanto:

$$X(z) = \frac{3}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

Tomando la transformada z a cada término se obtiene:

$$\Im^{-1}\left[\frac{3}{z}\right] = 3\Im^{-1}[z^{-1}] = \begin{cases} 3 & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{2}{z^2}\right] = 2\Im^{-1}[z^{-2}] = \begin{cases} 2 & k = 2 \\ 0 & k \neq 2 \end{cases}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{1}{z^3}\right] = \Im^{-1}[z^{-3}] = \begin{cases} 1 & k = 3 \\ 0 & k \neq 3 \end{cases}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{3}{z-1}\right] = 3\Im^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] = \begin{cases} 3 & k \geq 1 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)^2}\right] = \Im^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2} * z^{-1}\right] = \begin{cases} k-1 & k \geq 1 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

De las expresiones anteriores se deduce que:

$x(0) = 0 + 0 + 0 - 0 + 0 = 0$

$x(1) = 3 + 0 + 0 - 3 + 0 = 0$

$x(2) = 0 + 2 + 0 - 3 + 1 = 0$

$x(3) = 0 + 0 + 1 - 3 + 2 = 0$

$x(4) = 0 + 0 + 0 - 3 + 3 = 0$

$x(5) = 0 + 0 + 0 - 3 + 4 = 1$

$x(6) = 0 + 0 + 0 - 3 + k - 1 = k - 4 = 2$

Es decir:

$$x(k) = \begin{cases} k-4 & k \geq 5 \\ 0 & k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

2.3.3 Método de la Integral de Inversión: La técnica más general para obtener la transformada z inversa es la de la integral de inversión. Esta integral, deducida a partir de la teoría de la variable compleja, está dada por [2.4]:

$$\Im^{-1}\{X(z)\} = x(k) = \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(z)z^{k-1}\, dz \qquad 2.24$$

En donde C representa una trayectoria circular con centro en el origen del plano z y que encierra a todos los polos de $X(z)z^{k-1}$.

La integral dada en la ecuación 2.24 se puede evaluar utilizando el teorema de los residuos:

$$x(k) = \sum_{i=1}^{n} [Residuos\ de\ X(z)z^{k-1}\ en\ el\ polo\ z = p_i] \qquad 2.25$$

$$x(k) = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots C_n \qquad 2.26$$

En donde $C_1 + C_2 + C_3 + \cdots C_n$ son los residuos en los polos $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ respectivamente.

Para evaluar los residuos se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Si el denominador de $X(z)z^{k-1}$ contiene un polo simple en $z = p_i$, el residuo correspondiente es:

$$C_i = \lim_{z \to p_i} (z - p_i)X(z)z^{k-1} \qquad 2.27$$

- Si el denominador de $X(z)z^{k-1}$ tiene un polo múltiple p_j de orden r, el residuo C_r está dado por:

$$C_r = \frac{1}{(r-1)!}\lim_{z \to p_j}\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left[(z - p_j)X(z)z^{k-1}\right] \qquad 2.28$$

- Si $X(z)$ tiene un cero de orden q en el origen entonces $X(z)z^{k-1}$ en la ecuación 2.25 tendrá un cero de orden $q + k - 1$ en el origen.
- Si $X(z)z^{k-1}$ tiene un polo simple ó un polo múltiple en el origen en $z = 0$, la evaluación de los residuos se puede hacer muy laboriosa. En este caso, se recomienda utilizar el método de fracciones parciales para obtener la transformada z inversa.

EJEMPLO 2.11

Hallar la transformada z inversa de:

$$G(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)(z-4)}$$

SOLUCIÓN: Para comenzar, se debe calcular $G(z)z^{k-1}$

$$G(z)z^{k-1} = \frac{z^k}{(z-2)(z-3)(z-1)}$$

Para $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$, $G(z)z^{k-1}$ tiene tres polos simples en $z = 2, z = 3\ y\ z = 1$ entonces:

$$g(k) = C_1 + C_2 + C_3$$

En donde:

$$C_1 = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^k}{(z-2)(z-3)(z-1)} = -2^k$$

$$C_2 = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{z^k}{(z-2)(z-3)(z-1)} = \frac{3^k}{2}$$

$$C_3 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^k}{(z-2)(z-3)(z-1)} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$g(k) = \frac{1}{2} - 2^k + \frac{3^k}{2}$$

EJEMPLO 2.12

Hallar la transformada z inversa de:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-0.5)}$$

SOLUCIÓN: Al utilizar la integral de inversión se obtiene:

$$X(z)z^{k-1} = \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-0.5)}$$

$$x(k) = C_1 + C_2$$

$$C_1 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-0.5)} = 2k-2$$

$$C_2 = \lim_{z\to 0.5}(z-0.5)\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-0.5)} = 2(0.5)^k$$

$$x(k) = 2(0.5)^k + 2k - 2$$

2.3.4 Método Computacional: Este método utiliza software mediante el cual es posible obtener la transformada z inversa bien sea en forma de serie infinita de potencias ó en forma de una expresión matemática específica. En el caso del MATLAB; la transformada z inversa se evalúa obteniendo la respuesta del sistema al impulso unitario. En este caso la entrada está dada por:

$$u = [1\ zeros(1, N)] \qquad 2.29$$

En donde N corresponde al último periodo de muestreo deseado para la observación de la respuesta. A continuación se presenta un programa en MATLAB que permite evaluar la transformada z inversa.

EJEMPLO 2.13

Utilizando el MATLAB, determinar la transformada z inversa de:

$$G(z) = \frac{2z^{-3}}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

SOLUCIÓN: $G(z)$ se puede escribir en la como:

$$G(z) = \frac{2}{z^3 - 1.5z^2 + 0.5z}$$

El programa en MATLAB para evaluar la transformada z inversa es:

```
% Transformada z inversa
% Introducir el numerador y el denominador
n=[0 0 0 2];
```

```
d=[1 -1.5 0.5 0];
u=[1 zeros(1,20)];
y=filter(n,d,u)
```

Al ejecutar el programa se obtiene el siguiente resultado:

g(0)=0.0000	g(5)=3.5000	g(10)=3.9844
g(1)=0.0000	g(6)=3.7500	. . . . .
g(2)=0.0000	g(7)=3.8750	. . . . .
g(3)=2.0000	g(8)=3.9375	g(19)=4.0000
g(4)=3.0000	g(9)=3.9688	g(20)=4.0000

Para obtener la respuesta correcta, es necesario que el numerador n, y el denominador d, se introduzcan al MATLAB con el mismo número de coeficientes, por esta razón se introdujo $n = [0\ 0\ 0\ 2]$ y no $n = [2]$ como sería lo más fácil.

Si se desea graficar la respuesta al impulso unitario se puede utilizar el siguiente programa:

```
% Transformada z inversa.
% Gráfica de la respuesta al impulso unitario.
clc
n=[0 0 0 2] ,
d=[1 -1.5 0.5 0];
u=[1  zeros(1,20)];
k=0:20;
y=filter(n,d,u);
plot(k,y,'*')
title('RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

La figura 2.1 muestra el resultado que se obtiene al graficar la transformada z inversa de la función dada.

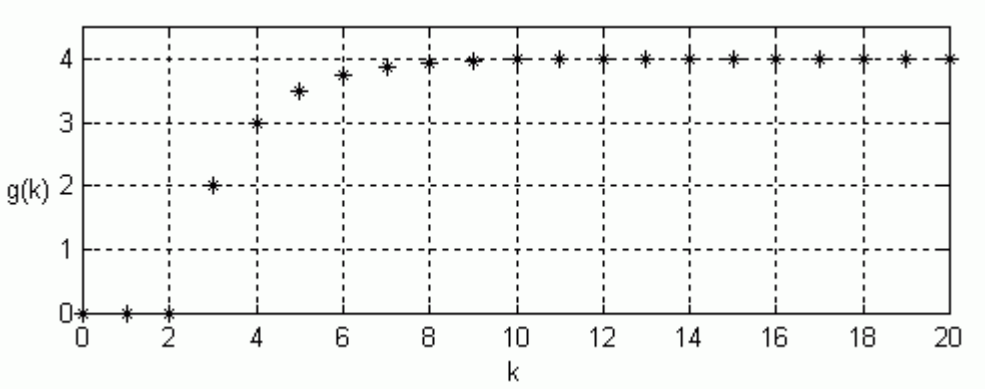


Figura 2.1 Respuesta al impulso unitario

EJEMPLO 2.14

Hallar la transformada z inversa de la función:

$$X(z) = \frac{2}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)}$$

Utilizando tres métodos diferentes.

SOLUCIÓN:

a) Utilizando el método de expansión en fracciones parciales.

Como no hay ceros en $z = 0$, se expande $X(z)$ en fracciones parciales:

$$X(Z) = \frac{a}{z-0.5} + \frac{b}{z-0.4} + \frac{c}{z-0.2}$$

$$a = \frac{2}{(z-0.4)(z-0.2)}\bigg|_{z=0.5} = 66.666 \qquad b = \frac{2}{(z-0.5)(z-0.2)}\bigg|_{z=0.4} = -100$$

$$c = \frac{2}{(z-0.5)(z-0.4)}\bigg|_{z=0.2} = -33.333$$

$$X(z) = \frac{66.666}{z-0.5} - \frac{100}{z-0.4} + \frac{33.333}{z-0.2}$$

$$x(k) = 66.666(0.5)^{k-1} - 100(0.4)^{k-1} + 33.333(0.2)^{k-1}$$

b) Utilizando la integral de inversión:

$$X(z)z^{k-1} = \frac{2z^{k-1}}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)} = \frac{2z^{k}}{z(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)}$$

Para $k = 0$ la función $X(z)z^{k-1}$ es:

$$X(z)z^{k-1} = \frac{2}{z(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)}$$

En este caso $X(z)z^{k-1}$ tiene cuatro polos, por lo tanto, para $k = 0$:

$$x(0) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

En donde:

$$C_1 = \lim_{z\to 0} z * \frac{2}{z(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)} = -50$$

$$C_2 = \lim_{z\to 0.5} (z-0.5) * \frac{2}{z(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)} = 133.333$$

$$C_3 = \lim_{z\to 0.4} (z-0.4) * \frac{2}{z(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)} = -250$$

$$x(0) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \qquad x(0) = 0$$

Para $k = 1, 2, 3$ ... La función $X(z)z^{k-1}$ es:

$$X(z)z^{k-1} = \frac{2}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)}$$

En este caso $X(z)z^{k-1}$ tiene tres polos, entonces:

$$C_1 = \lim_{z\to 0.5} (z-0.5) * \frac{2z^{k-1}}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)} = 66.666(0.5)^{k-1}$$

$$C_2 = \lim_{z\to 0.4} (z-0.4) * \frac{2z^{k-1}}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)} = -100(0.4)^{k-1}$$

$$C_3 = \lim_{z\to 0.2} (z-0.2) * \frac{2z^{k-1}}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.2)} = 33.333(0.2)^{k-1}$$

Así, la transformada z inversa de $X(z)$ se puede escribir como:

$$x(k) = \begin{cases} 66.666(0.5)^{k-1} - 100(0.4)^{k-1} + 33.333(0.2)^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

c) Programa en MATLAB

```
% Cálculo de la transformada inversa
n=[0 0 0  2];
d=conv(conv([1 -0.5],[1 -0.4]),[1 -0.2]);
u=[1 zeros(1,20)];
Y=filter(n,d,u)
```

Al ejecutar el programa se obtiene:

y(0)=0.00	y(3)=2.00	y(6)=1.07	y(8)=0.3574
y(1)=0.00	y(4)=1.56	y(7)=0.6342	. . . . .
y(2)=0.00	y(5)=1.66	y(8)=0.3574	y(α)=0.00

2.4 LA TRANSFORMADA Z MODIFICADA

La transformada z modificada se utiliza cuando la función de transferencia de un sistema que se analiza, presenta un determinado tiempo muerto ó retardo θ'.

Asumiendo que la función de transferencia del sistema está dada por:

$$G_pS) = G(S)e^{-\theta' S} \qquad 2.30$$

En donde G(S) no contiene tiempo muerto y θ' es el tiempo muerto, el procedimiento para evaluar la transformada z de esta función es el siguiente:

Sea:

$$\theta' = NT + \theta \qquad 2.31$$

En donde T es el periodo de muestreo y N es la parte entera del cociente:

$$N = \frac{\theta'}{T} \qquad 2.32$$

Sustituyendo la ecuación 2.31 en la ecuación 2.30 se obtiene:

$$G_pS) = G(S)e^{-(NT+\theta)S} \qquad 2.33$$

Tomando la transformada z a la ecuación 2.33:

$$G_p(z) = \Im\{G(S)e^{-(NT+\theta)S}\}$$

Es decir:

$$G_p(z) = z^{-N}\Im\{G(S)e^{-\theta S}\} \qquad 2.34$$

El término $\Im\{G(S)e^{-\theta S}\}$ se define como la transformada z modificada de $G(S)$ y se denota por: $\Im_m\{G(S)\} = G(z,m)$. Entonces:

$$G_p(z) = z^{-N}\Im_m\{G(S)\} = z^{-N}G(z,m) \qquad 2.35$$

En donde:

$$m = 1 - \frac{\theta}{T} \qquad 2.36$$

En la tabla 2.3 se da la transformada z modificada de algunas funciones prácticas.

Tabla 2.3 Transformada z modificada

Nº	$f(t)$	$F(kT)$	$F(S)$	$F(z)$ Modificada
1	$u(t)$	$U(kT)$	$\frac{1}{S}$	$\frac{1}{z-1}$
2	t	kT	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{mT}{z-1}-\frac{T}{(z-1)^2}$
3	t^2	$(kT)^2$	$\frac{2}{S^3}$	$T^2\left[\frac{m^2}{z-1}+\frac{2m+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}\right]$
4	t^{n-1}	$(kT)^{n-1}$	$\frac{(n-1)!}{S^n}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
5	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{S+a}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
6	te^{-at}	$(kT)e^{-akT}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Te^{-amT}[e^{-aT}+m(z-e^{-aT})]}{(z-e^{-aT})^2}$
7	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{a}{S(S+a)}$	$\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
8	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S^2(S+a)}$	$\frac{aT}{(z-1)^2}+\frac{amT-1}{z-1}+\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
9	$\mathbf{1-(1+at)e^{-at}}$	$\mathbf{1-(1+akT)e^{-akT}}$	$\frac{a^2}{S(S+a)^2}$	$\frac{1}{z-1}-\left[\frac{1+amT}{z-e^{-aT}}+\frac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]$
10	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{b-a}{(S+a)(S+b)}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}-\frac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
11	$sin(bt)$	$sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{z.sin(bmT)+sin(1-m)bT}{z^2-2zcos(bT)+1}$
12	$cos(bt)$	$cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z.cos(bmT)-cos(1-m)bT}{z^2-2zcos(bT)+1}$
13	$e^{-at}sin(bt)$	$e^{-akT}sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{[z.sin(bmT)+e^{-aT}sin(1-m)bT]e^{-amT}}{z^2-2ze^{-aT}cos(bT)+e^{-2aT}}$
14	$e^{-at}cos(bt)$	$e^{-akT}cos(bkT)$	$\frac{S+a}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{[z.cos(bmT)+e^{-aT}sin(1-m)bT]e^{-amT}}{z^2-2ze^{-aT}cos(bT)+e^{-2aT}}$

EJEMPLO 2.15

Hallar la transformada z de la función:

$$G_p(S) = \frac{5e^{-1.3S}}{(S+3)^2}$$

Asumir que el periodo de muestreo es $T = 1\ s$.

SOLUCIÓN: Utilizando las ecuaciones 2.31, 2.32 y 2.36 se obtiene:

$$N = \frac{\theta'}{T} = \frac{1.3}{1} = 1 \qquad (Se\ toma\ sólo\ la\ parte\ entera\ del\ cociente)$$

$$\theta = \theta' - NT = 1.3 - 1 = 0.3$$

$$m = 1 - \frac{\theta}{T} = 1 - \frac{0.3}{1} = 0.7$$

Utilizando la tabla 2.3 se encuentra que:

$$\Im\left\{\frac{1}{(S+a)^2}\right\} = \frac{Te^{-amT}[e^{-aT} + m(z - e^{-aT})]}{(z - e^{-aT})^2}$$

Utilizando la ecuación 2.34 con $N = 1$ y con $G(S) = 5/(S+3)^2$ se obtiene:

$$G_p(z) = z^{-1}\Im_m\left\{\frac{5}{(S+3)^2}\right\} = \frac{5 * 0.12245[0.04978 + 0.7(z - 0.04978)]}{(z - 0.04978)^2}$$

Simplificando:

$$G_p(S) = \frac{0.42857(z + 0.02133)}{(z - 0.04978)^2}$$

2.5 APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA Z EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS.

Una ecuación en diferencias representa la relación entre la salida del sistema y sus retardos y la entrada al mismo y sus retardos. Usualmente se escribe como una ecuación recurrente de modo que la salida del sistema se pueda calcular a partir de sus valores anteriores y de la señal de entrada y sus valores anteriores. La transformada z y la transformada z inversa, representan una buena herramienta para resolver ecuaciones en diferencias. El método consiste en tomar primero la transformada z de la ecuación, despejar la variable dependiente y,

finalmente, tomar la transformada inversa z a la expresión resultante. Para dar claridad se explica el método mediante la solución de algunos ejemplos prácticos.

EJEMPLO 2.16

Resolver la ecuación:

$$4x(k) - 4x(k-1) + 2x(k-2) = u(k)$$

$$x(k) = 0 \qquad \text{Para} \quad k < 0 \qquad u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Tomando la transformada z a cada uno de los términos de la ecuación dada, se obtiene:

$$4X(z) - 4z^{-1}X(z) + 2z^{-2}X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$2[2 - 2z^{-1} + z^{-2}]X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$X(z) = \frac{0.5z}{(z-1)(2-2z^{-1}+z^{-2})} = \frac{0.5z^3}{(z-1)(2z^2-2z+1)}$$

Expandiendo X(z)/z en fracciones parciales:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{0.5}{z-1} + \frac{0.5-0.5z}{2z^2-2z+1} = \frac{0.5}{z-1} - \frac{0.25(z-1)}{z^2-z+0.5}$$

$$X(z) = \frac{0.5z}{z-1} - \frac{0.25(z^2-z)}{z^2-z+0.5}$$

Como puede verse, los polos del segundo término del lado derecho de la ecuación son complejos conjugados, entonces, la transformada inversa z de éste término es de la forma $e^{-akT}cos(bT)$ y/o $e^{-akT}sen(bT)$.

Haciendo uso de la tabla 2.1 se encuentra que:

$$\Im\{e^{-aT}\sin(bT)\} = \frac{ze^{-aT}\sin(bT)}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos(bT) + 2e^{-2aT}}$$

$$\Im\{e^{-aT}\cos(bT)\} = \frac{z^2 - ze^{-aT}\cos(bT)}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos(bT) + 2e^{-2aT}}$$

Comparando estas ecuaciones, con el segundo término del lado derecho de $X(z)/z$ se obtiene:

$e^{-2aT} = 0.5 \qquad e^{-aT} = 0.707$

$2e^{-aT}cos(bT) = 1$ $cos(bT) = 0.707$ $bT = \frac{\pi}{4}$

$Sen(bT) = 0.707$ $e^{-aT}sin(bT) = 0.5$ $e^{-aT}cos(bT) = 0.5$

Con los valores anteriores se obtiene:

$$\frac{z^2 - z}{z^2 - z + 0.5} = \frac{z^2 - 0.5z}{z^2 - z + 0.5} - \frac{0.5z}{z^2 - z + 0.5}$$

Por lo tanto:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - 0.25\left[\frac{z^2 - 0.5z}{z^2 - z + 0.5} - \frac{0.5z}{z^2 - z + 0.5}\right]$$

Tomando la transformada inversa z resulta:

$$x(k) = 0.5 - 0.25(0.707)^k \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + 0.25(0.707)^k sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$$

Solución utilizando el MATLAB

Si de la ecuación se despeja $x(k)$ se obtiene:

$$x(k) = x(k-1) - 0.5x(k-2) + 0.25u(k)$$

Teniendo en cuenta que $x(k) = 0$ para $k < 0$, se puede escribir el siguiente programa en MATLAB para resolver la ecuación en diferencias dada:

```
clc  % Programa para calcular los valores de x(k)
xk=0;
xk1=0;
xk2=0;
uk=1;
for k=0:20;
xk1=xk;
xk=xk1-0.5*xk2+0.25*uk;
xk2=xk1;
[k, xk]
```

Al ejecutar el programa, se obtiene el siguiente resultado:

x(0)=0.2500	x(6)=0.4688	x(12)=0.5039
x(1)=0.5000	x(7)=0.4688	x(13)=0.5000

x(2)=0.6250	x(8)=0.4844	. . . . .
x(3)=0.6250	x(9)=0.5000	. . . . .
x(4)=0.5625	x(10)=0.5078	. . . . .
x(5)=0.5000	x(11)=0.5078	x(20)=0.5000

EJEMPLO 2.17

Resolver la ecuación:

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = u(k)$$

En donde: $x(k) = 0$ para $k \leq 0$ y $u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN: Tomando la transformada z a la ecuación dada, se obtiene:

$$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) - 3[zX(z) - zx(0)] + 2X(z) = 1$$

$$(z^2 - 3z + 2)X(z) = z^2x(0) + zx(1) + 3zx(0) + 1$$

Según las condiciones dadas: $x(0) = 0$. Con este dato se puede calcular $x(1)$, haciendo $k = -1$ en la ecuación original asi:

$$x(1) - 3x(0) + 2x(-1) = 0 \qquad x(1) = 0$$

Reemplazando $x(0)$ y $x(1)$ se obtiene:

$$(z^2 - 3z + 2)X(z) = 1 \qquad X(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Tomando la transformada inversa z resulta:

$$x(kT) = \begin{cases} (2)^{k-1} - (1)^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 2.18

Resolver la ecuación:

$$y(k+2) + y(k) = u(k)$$

En donde: $y(k) = 0$ para $k < 0$ y $u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN: Tomando la transformada z a la ecuación dada se obtiene:

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) + Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$(z^2 + 1)Y(z) = z^2y(0) + zy(1) + \frac{z}{z-1}$$

Para evaluar los valores de $y(0)$ e $y(1)$ se procede así:

Haciendo $k=-2$ en la ecuación original: $y(0)+y(-2)=u(-2)$ es decir: $y(0)=0$

Haciendo $k=-1$ en la ecuación original: $y(1)+y(-1)=u(-1)$ es decir: $y(1)=0$

Por lo tanto:

$$(z^2+1)Y(z)=\frac{z}{z-1} \qquad Y(z)=\frac{z}{(z-1)(z^2+1)}$$

Expandiendo $Y(z)/z$ en fracciones parciales:

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1+z}{z^2+1}\right] \qquad Y(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z^2+z}{z^2+1}\right]$$

Tomando la transformada inversa z se obtiene:

$$y(k)=\frac{1}{2}\left[1-sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)-cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

$y(k)$ también se puede dar en la forma:

$y(0)=0$	$y(4)=0$	$y(8)=0$
$y(1)=0$	$y(5)=0$	$y(9)=0$
$y(2)=1$	$y(6)=1$	$y(10)=1$
$y(3)=1$	$y(7)=1$	$y(11)=1$

PROBLEMAS PROPUESTOS

2.1 Hallar la transformada z correspondiente a las siguientes funciones:

$a)\ X(S)=\dfrac{5}{S^2(S+3)}$ $\quad T=0.1\ s$

$b)\ X(S)=\dfrac{3(S+1)}{S(S+2)(S+3)}$ $\quad T=0.1\ s$

$c)\ Y(S)=\dfrac{e^{-S}}{S^2(S+1)}$ $\quad T=0.5\ s$

$d)\ G(s)=\dfrac{2}{(s+1)(S^2+4S+20)}$ $\quad T=0.1\ s$

$e)\ G(S)=\dfrac{0.5e^{-2S}}{S(S+0.1)(S+0.2)}$ $\quad T=2\ s$

$f)\ G(S)=\dfrac{3e^{-4S}}{20S+1}$ $\quad T=5\ s$

2.2 Hallar la Transformada z correspondiente a las siguientes funciones:

$a)\ x(t)=1-e^{-t}$ $\quad T=0.5\ s$

$b)\ x(t)=5e^{-t}+8e^{-2t}$ $\quad T=0.2\ s$

$c)\ x(t)=e^{-(t-5T)}.u(t-5)$ $\quad T=1\ s$

$f)\ y(t)=3t-4+e^{-t}$ $\quad T=1\ s$

$g)\ y(t)=e^{-(t-T)}.u(t-T)$ $\quad T=0.4\ s$

$h)\ y(t)=3e^{-2t}sen(4t)+t^2$ $\quad T=0.5\ s$

$d)\ x(t) = 5u(t-4T)$ $\quad T = 1\ s$ $\quad i)\ y(k) = ka^{k-1}$

$e)\ x(t) = 4 + 2te^{-3t}$ $\quad T = 0.5\ s$ $\quad j)\ y(k) = 9k(2)^{k-1} - 2^k + 3$

2.3 Hallar la transformada inversa z para cada una de las siguientes funciones utilizando dos métodos diferentes. Compare los valores de $x(k)$ para $k = 0, 1, 2, 3$ y 4 en cada caso.

$a)\ X(z) = \dfrac{0.2706}{(z-0.1353)^2}$ $\qquad d)\ X(z) = \dfrac{0.25z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$

$b)\ X(z) = \dfrac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}$ $\qquad e)\ X(z) = \dfrac{2+z^{-2}}{(1-z^{-z})(1-0.5z^{-1})}$

$c)\ X(z) = \dfrac{z+0.2}{z^2(z-0.5)}$ $\qquad f)\ X(z) = \dfrac{0.368z^2 + 0.478z + 0.154}{z^2(z-1)^2}$

2.4 Resolver las siguientes ecuaciones de diferencias:

$a)\ 2x(k) - 2x(k-1) + x(k-2) = u(k)$

$x(k) = 0$ para $k < 0$ $\qquad u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

$b)\ x(k+2) = x(k+1) + x(k)$ $\qquad x(0) = 0$ $\qquad x(1) = 1$

$c)\ x(k+2) - x(k+1) + 0.25x(k) = u(k+2)$ $\qquad u(k) = 1$ $\qquad$ para $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$d)\ y(k) - y(k-1) + 0.24y(k-2) = x(k) + x(k-1)$

En donde $x(k)$ es la entrada e $y(k)$ la salida del sistema

$y(k) = 0 \quad para \quad k < 0 \qquad y \qquad x(k) = \begin{cases} 1 & k > 0 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$

$e)$ Escriba un programa en MATLAB que permita resolver numéricamente las ecuaciones dadas en los literales a) y b) del ejercicio anterior.

2.5 Dada la ecuación en diferencias:

$x(k+3) - 2.2x(k+2) + 1.57x(k+1) - 0.36x(k) = u(k)$

En donde: $u(k) = 1$ para $k \geq 0$, $\qquad x(0) = x(1) = x(2) = 0$

a) Resolver la ecuación y calcular los valores de $x(k)$ para $0 \leq k \leq 10$ b) Escribir un programa en MATLAB ó en lenguaje C que permita resolver numéricamente la ecuación.

2.6 La transformada z de una función $f(t)$ con $T = 1\ s$, está dada por:

$$F(z) = \frac{z(z-0.4)}{(z-0.5)(z-0.6)}$$

Calcular: a) La secuencia $f(kT)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots\ 6$ b) El valor final de $f(kT)$

2.7 Determinar la transformada z de las secuencias que se dan a continuación. En lo posible, exprese el resultado mediante un término general.

$a)\ x(k) = \begin{cases} 0 & k = 0, 1, 3, 5 \ldots \\ 1 & k = 2, 4, 6, 8 \ldots \end{cases}$

$b)\ y(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 3, 5 \ldots \\ -1 & k = 2, 4, 6, 8 \ldots \end{cases}$

$c)\ g(k) = \begin{cases} \cos(k\pi) & k = 2, 4, 6, 8 \ldots \\ 0 & k = 1, 3, 5, 7 \ldots \end{cases}$

$d)\ g(kT) = kTe^{-kT} \qquad k \geq 0$

2.8 Hallar la transformada z de las siguientes funciones:

$a)\ x(k) = (0.4)^k u(k) + 0.2k(0.4)^k u(k)$

$b)\ f(k) = (0.4)^k u(k) + 0.2k(0.4)^{k-1} u(k-1)$

2.9 El comportamiento dinámico de cierto sistema discreto se describe mediante la secuencia:

$$g(k) = \begin{cases} 0.2(0.8)^k - 0.1(0.4)^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

a) Determinar la función de transferencia $G(z) = Y(z)/X(z)$ del sistema. b) Si la entrada al sistema $x(k)$ es un escalón unitario, calcular su salida $y(k)$. c) Utilice el resultado obtenido en la parte b y grafique la respuesta del sistema para el intervalo $0 \leq k \leq 10$ d) A qué valor tiende $y(k)$ cuando $k \to \infty$?

2.10 Resuelva el problema anterior si el comportamiento dinámico del sistema se describe mediante la secuencia:

$$g(k) = \begin{cases} 1.75(0.9)^k - 0.75(-0.6)^k & k \geq 1 \\ 0 & k < 1 \end{cases}$$

2.11 Para cada una de las funciones dadas a continuación evaluar a) $f(0)$ utilizando el teorema del valor inicial. b) $f(\infty)$ utilizando el teorema del valor final. c) Hallar la transformada inversa z de cada una de las funciones y a partir de ella, comprobar los resultados obtenidos en a) y en b).

$a)\ \ F(z) = \dfrac{z}{(z-0.8)(z-0.4)}$ $\qquad$ $b)\ \ F(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)(z^2-z+0.2)}$

$b)\ \ F(z) = \dfrac{2(z+0.5)}{(z-1)(z-0.7)(z-0.8)}$ $\qquad$ $d)\ \ F(z) = \dfrac{z+0.5}{z-0.5}$

2.12 Dada la ecuación en diferencias:

$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = x(k)$

$x(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $x(0) = 1$ $\qquad$ $x(1) = -1$

a) Calcular $y(0), y(1), y(2), y(3)$ e $y(4)$ recursivamente. b) Comprobar el resultado obtenido en a) resolviendo la ecuación en diferencias.

2.13 La transformada z de cierta función $y(t)$ es:

$$Y(z) = \frac{z^2 - 0.4z}{(z-0.5)(z-0.6)(z-0.8)}$$

2.14 Utilizando las propiedades de la transformada z calcular la transformada z de:

$a)\ y(t-3T)$ $\qquad$ $c)\ \ y(t+2T)$

$b)\ y(t-3T) * u(t-3T)$ $\qquad$ $d)\ \ y(t+2T)u(t)$

2.15 Para cada uno de los sistemas discretos cuya función de transferencia de pulso $G(Z)$ se da a continuación, obtenga la secuencia de salida $y(k)$ correspondiente a la secuencia de entrada $r(k)$ dada para $k \geq 0$ (ver figura 2.2).

$a)\ \ G(z) = \dfrac{2}{(z+0.5)(z+0.8)}$ $\qquad$ $r(k) = 2u(k)$

$b)\ G(z) = \dfrac{0.5}{(z-1)^2}$ $\qquad r(k) = (0.5)^k$

$c)\ G(z) = \dfrac{z}{z-0.6}$ $\qquad r(k) = \sin(k)$

$d)\ G(z) = \dfrac{0.2}{z-0.8}$ $\qquad r(k) = tu(t)$

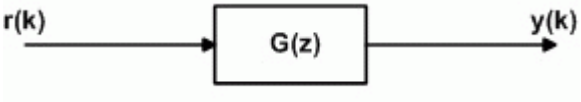


Figura 2.2 Sistema para el problema 2.14

2.16 Obtenga la transformada z de la función $y(t)$ cuya gráfica se muestra en la figura 2.3

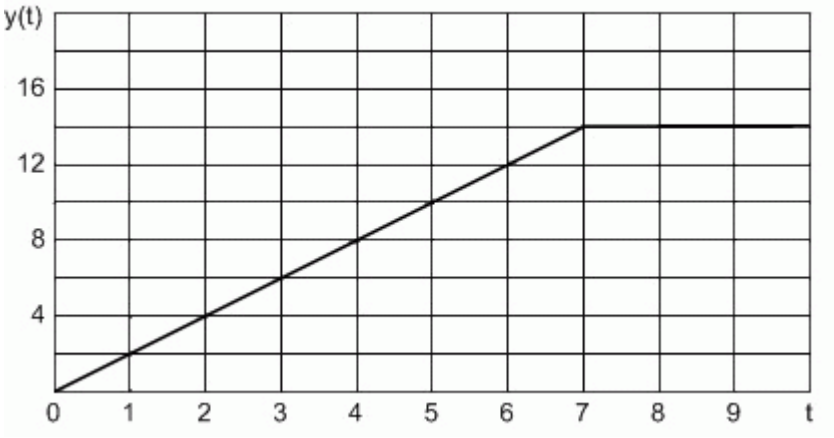


Figura 2.3 Grafica para el problema 2.16

2.17 Dada la ecuación en diferencias:

$$m(k) - 3m(k-1) + 2m(k-2) = e(k)$$

En donde:

$$e(k) = \begin{cases} 0.5 & k = 0, 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases} \qquad m(-2) = m(-1) = 0$$

Resolver la ecuación utilizando a) El método recursivo. b) El método de la transformada z. c) Utilice el teorema del calor final y calcule el valor de $m(k)$ cuando $k \to \infty$

2.18 Dada la ecuación en diferencias:

$$m(k+3) - 1.5m(k+2) + 0.66m(k+1) - 0.08m(k) = e(k)$$

En donde:

$$e(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad m(0) = \ \ m(1) = m(2) = 0$$

a) Obtenga la solución de la ecuación utilizando el método de la transformada z y calcule los valores de $m(k)$ para el intervalo: $0 \leq k \leq 5$. b) Utilice el método de la división y calcule los valores de $m(k)$ para el intervalo: $0 \leq k \leq 5$.

REFERENCIAS

[2.1] Leigh, J.R. *Applied Digital Control*. Theory design and implementation. Prentice Hall. 1992.

[2.2] Phillips, Charles. Nagle, Troy. *Digital Control Systems Analysis and design*. Prentice Hall. 1995.

[2.3] Deshpande, Pradeep. Ash, Raymond. *Computer Process Control*. Instruments Society of America. 1981.

[2.4] Ogata Katsuhico. *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice Hall. 1996

[2.5] Kuo, Benjamín. *Sistemas de Control Digital*. Compañía Editorial Continental. 1997

[2.6] Perdikaris, George. *Computer Controlled Systems*. Kluvver. Academic Publishers. 1996.

CAPITULO 3

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO

La forma clásica para modelar sistemas de control lineales es utilizar el concepto de función de transferencia para representar la relación entrada-salida entre variables.

Para un sistema continuo, lineal e invariante en el tiempo, la función de transferencia se define como la relación entre la Transformada de Laplace de la salida y la Transformada de Laplace de la entrada, asumiendo las condiciones iniciales iguales a cero.

La función de transferencia de un sistema en tiempo continuo se expresa sólo como función de la variable compleja S y no es función de la variable real, tiempo ó cualquier otra variable que se utilice como la variable independiente [3.1].

De acuerdo con la definición, la función de transferencia del sistema mostrado en el diagrama de bloques de la figura 3.1 es:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} \qquad 3.1$$

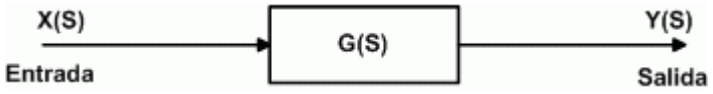


Figura 3.1 Función de transferencia para sistemas continuos.

Por analogía con los sistemas continuos, en un sistema discreto, la función de transferencia de pulso relaciona la salida pulsante con la entrada pulsante del sistema. Como se ha visto, las señales muestreadas (pulsantes) se trabajan convenientemente utilizando la transformada z. Si se considera a $X(z)$ como la transformada z de la entrada al sistema y a $Y(z)$ como la transformada z de la salida del mismo, la función de transferencia de pulso del sistema es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad 3.2$$

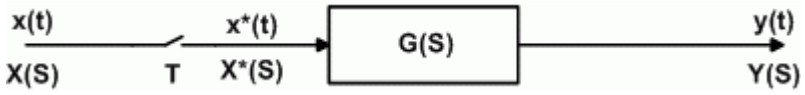


Figura 3.2 Sistema continuo con muestreador a la entrada.

Para el sistema de la figura 3.2, la salida $Y(S)$ está dada por:

$$Y(S) = G(S)X^*(S) \qquad 3.3$$

En donde:

$$X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS} \qquad 3.4$$

La respuesta $y(t)$ del sistema, se obtiene aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación 3.3, es decir:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(S)X^*(S)] \tag{3.5}$$

Si se utiliza el teorema de la convolución en la ecuación 3.5 resulta:

$$y(t) = \int_0^t g(t-u)x^*(u)du \tag{3.6}$$

$$y(t) = \int_0^t g(t-u)\sum_{k=0}^{\infty} x(u)\delta(u-kT)du$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t g(t-u)x(u)\delta(u-kT)du$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(t-kT)x(kT) \tag{3.7}$$

Al tomar la transformada z a la ecuación 3.7 se obtiene:

$$Y(z) = \Im\{y(t)\} = \Im\{y(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} g(nT-kT)x(kT)\right]z^{-n}$$

Haciendo $n-k=j$ resulta:

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g(jT)x(kT)z^{-(j+k)}$$

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g(jT)z^{-j}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

De la definición de transformada z se obtiene que: $Y(z) = G(z)X(z)$ es decir:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{3.8}$$

3.1 PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO

La función de transferencia de pulso de un sistema, se puede obtener utilizando diferentes métodos así [3.2]

- Si se tiene una tabla con las expresiones de $X(z)$ y de $X(S)$ para una $x(t)$ dada, el procedimiento para obtener la función de transferencia de pulso es

sencillo: primero se obtiene la función de transferencia $G(S)$ del sistema, luego se expande $G(S)$ en fracciones parciales de modo que, en la tabla, se pueda encontrar la transformada z de cada uno de los términos obtenidos en la expansión de las fracciones parciales. La suma algebraica de los términos de la transformada z hallados, da la función de transferencia de pulso.

- Un segundo método consiste en utilizar la respuesta del sistema a la función Delta de Kronecker, en este caso:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Como la entrada es $x(t) = \delta(t)$ y $\Im\{\delta(t)\} = 1$, se obtiene que $G(z) = Y(z)$.

Por lo tanto, $G(z)$ se puede obtener a partir de $G(S)$ o a partir de $y(t)$ utilizando la definición de transformada z, es decir:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\, z^{-k} \qquad 3.9$$

- Un tercer método es el computacional, el cual con un software especializado permite, mediante la utilización de comandos sencillos, la obtención de la función de transferencia de pulso $G(z)$ a partir de la función de transferencia $G(S)$. En este caso pueden citarse programas como el MATLAB, el ACS, el CC entre otros.

EJEMPLO 3.1

Hallar la función de transferencia de pulso del sistema mostrado en la figura 3.3, utilizando los dos primeros métodos expuestos.

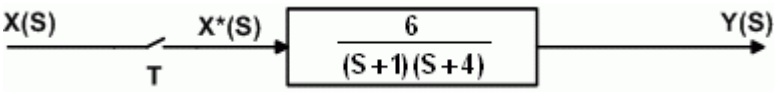


Figura 3.3 Sistema para el ejemplo 3.1

SOLUCIÓN: La función de transferencia para el sistema continuo es:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{6}{(S+1)(S+4)}$$

a) Expandiendo en fracciones parciales resulta:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{2}{S+1} - \frac{2}{S+4}$$

De tablas se obtiene:

$$\Im\left\{\frac{2}{S+1}\right\} = \frac{2z}{z-0.60653} \qquad \Im\left\{\frac{2}{S+4}\right\} = \frac{2z}{z-0.13533}$$

Así, la función de transferencia de pulso para el sistema es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z}{z-0.60653} - \frac{2z}{z-0.13533} = \frac{0.94239z}{(z-0.60653)(z-0.13533)}$$

b) Asumiendo que la entrada $x(t)$ es la función Delta de Kronecker $\delta(t)$ entonces:

$$G(S) = Y(S) = \frac{6}{(S+1)(S+4)} = \frac{2}{S+1} - \frac{2}{S+4}$$

De tablas, la transformada inversa de Laplace para la expresión anterior es:

$$g(t) = 2e^{-t} - 2e^{-4t}$$

Aplicando la definición de transformada z:

$$G(z) = \Im\{g(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} [2e^{-0.5k} - 2e^{-2k}]\, z^{-k}$$

$$G(Z) = 2\left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-0.5k} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k} z^{-k}\right]$$

$$G(z) = 2[(1 + e^{-0.5}z^{-1} + e^{-1}z^{-2} + \cdots) - (1 + e^{-2}z^{-1} + e^{-4}z^{-2} + \cdots)]$$

$$G(z) = \frac{2}{1 - e^{-0.5}z^{-1}} - \frac{2}{1 - e^{-2}z^{-1}} = \frac{0.94239z}{(z-0.60653)(z-0.13533)}$$

3.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO DE UN SISTEMA CON RETENEDOR DE ORDEN CERO.

La figura 3.4 muestra un sistema en el cual se incluye, además del muestreador, un retenedor de orden cero precediendo a la función continua $G(S)$. De acuerdo

con la ecuación 3.8, la función de transferencia de pulso para el sistema de la figura 3.3 está dada por:

$$HG(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \Im\{H(S)G_p(S)\} \qquad 3.10$$

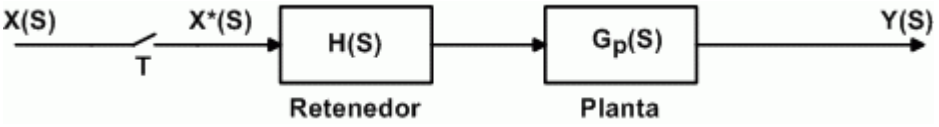


Figura 3.4 Sistema con retenedor de orden cero

Según la ecuación 1.8 la función de transferencia del retenedor de orden cero es:

$$H(S) = \frac{1 - e^{-ST}}{S}$$

Reemplazando esta ecuación en la 3.10 se obtiene:

$$HG(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \Im\left\{\frac{1 - e^{-ST}}{S} G_p(S)\right\} = \Im\left\{(1 - e^{-ST})\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

$$HG(z) = \Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} - \Im\left\{\frac{G_p(S)}{S} e^{-ST}\right\} = \Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} - z^{-1}\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

Es decir:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad 3.11$$

EJEMPLO 3.2

a) Hallar la función de transferencia de pulso para el sistema de la figura 3.5. Asuma que el periodo de muestreo es $T = 1\ s$ y que el retenedor $H(S)$ es de orden cero. b) Comprobar el resultado obtenido utilizando el MATLAB.

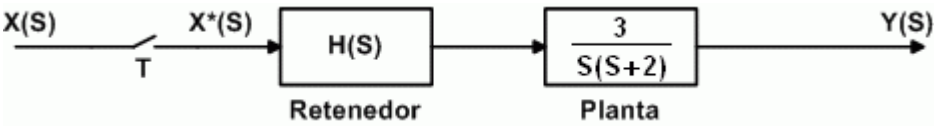


Figura 3.5 Sistema para el ejemplo 3.2

SOLUCIÓN: a) La función de transferencia de pulso para un sistema con retenedor de orden cero, está dada por la ecuación 3.11:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} \qquad \text{con} \qquad G(S) = \frac{3}{S(S+2)}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{3}{S^2(S+2)}\right\}$$

Utilizando tablas se encuentra que:

$$\Im\left\{\frac{a^2}{S^2(S+a)}\right\} = \frac{[(aT - 1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]z}{(z-1)^2(z - e^{-aT})}$$

Con $a = 2$ y $T = 1$ seg. Resulta, después de simplificar:

$$HG(z) = \frac{0.75(1.13533z + 0.59401)}{(z-1)(z - 0.13533)} = \frac{0.8549(z + 0.5232)}{(z-1)(z - 0.13533)}$$

b) Para hallar la función de transferencia de pulso utilizando el MATLAB se puede utilizar el siguiente programa:

```
%  Programa para hallar la función de transferencia de pulso para sistemas con
%  retenedor de orden cero si retardo.
n=[3];
d=[1 2 0];
[nd,dd]=c2dm(n,d,1,'zoh');
printsys(nd,dd,'z')
```

3.3 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO DE UN SISTEMA CON ELEMENTOS EN CASCADA

Considerando el sistema que se muestra en la figura 3.6a en el cual cada una de las funciones $G1(S)$ y $G2(S)$ están precedidas por un muestreador y, asumiendo que estos trabajan en forma sincronizada y que tienen el mismo periodo de muestreo, resulta:

$$U(S) = G_1(S)X^*(S)$$

$$Y(S) = G_2(S)U^*(S)$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$U^*(S) = G_1^*(S)X^*(S)$$

$$Y^*(S) = G_2^*(S)U^*(S)$$

Por lo tanto:

$$Y^*(S) = G_2^*(S)G_1^*(S)X^*(S)$$

Entonces, la función de transferencia de pulso que relaciona la salida $y^*(t)$ con la entrada $x^*(t)$ es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1(z)G_2(z) = \Im\{G_1(S)\} * \Im\{G_2(S)\} \qquad 3.12$$

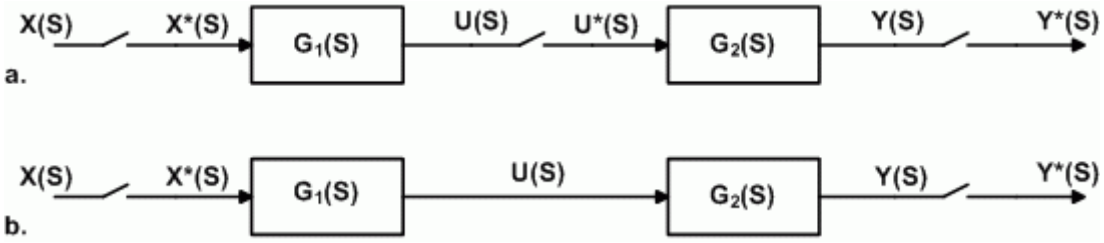


Figura 3.6 a) Sistema muestreado con muestreador entre dos elementos en cascada b) Sistema muestreado sin muestreador entre los elementos

Ahora bien, si se considera el sistema de la figura 3.6b, en la cual los elementos en cascada $G1(S)$ y $G2(S)$ no presentan muestreador entre ellos, se obtiene:

$$Y(S) = G_1(S)G_2(S)X^*(S) = G_1G_2(S)X^*(S)$$

En donde:

$$G_1G_2(S) = G_1(S)G_2(S)$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$Y^*(S) = [G_1G_2(S)]^*X^*(S)$$

Escribiendo la ecuación anterior en términos de la transformada z resulta:

$$Y(z) = G_1G_2(z)X(z)$$

Finalmente, la función de transferencia de pulso que relaciona la salida $y^*(t)$ con la entrada $x^*(t)$ es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1G_2(z) = \Im[G_1G_2(S)] \qquad 3.13$$

De las ecuaciones 3.12 y 3.13 se concluye que:

$$G_1(z)G_2(z) \neq G_1G_2(z)$$

EJEMPLO 3.3

Determinar la respuesta $b(kT)$ del sistema discreto de la figura 3.7. Asuma que $m(t)$ es un escalón unitario y que el periodo de muestreo es $T = 0.5\,s$. $H(S)$ es un retenedor de orden cero.

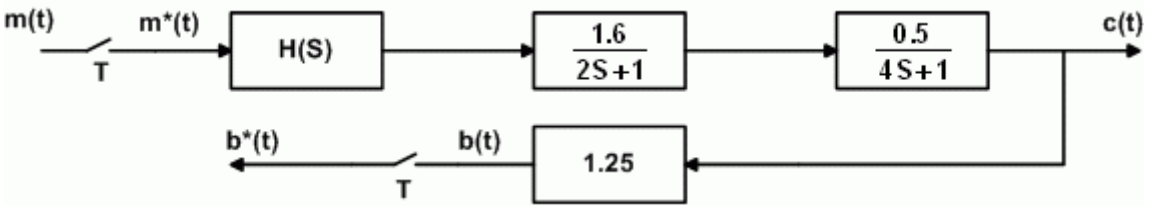


Figura 3.7 Sistema para el ejemplo 3.3

SOLUCIÓN: Debido a la presencia del retenedor de orden cero, la función de transferencia de pulso del sistema está dada por:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} \qquad G(S) = \frac{1}{(2S+1)(4S+1)}$$

$G(S)$ se puede escribir como:

$$G(S) = \frac{0.125}{(s+0.5)(S+0.25)}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{0.125}{S(S+0.5)(S+0.25)}\right\}$$

Expandiendo en fracciones parciales se obtiene:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{1}{S} + \frac{1}{S+0.5} - \frac{2}{S+0.25}\right\}$$

Utilizando las tablas de transformada z y teniendo en cuenta que el periodo de muestreo es $T = 0.5\,s$, resulta:

$$HG(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0.7788} - \frac{2z}{z-0.8825}\right]$$

Pero:

$$HG(z) = \frac{B(z)}{M(z)} \qquad B(z) = HG(z).M(z)$$

Dado que la entrada $m(t)$ es un escalón unitario, se tiene que $M(z) = z/(z-1)$, entonces:

$$B(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0.7788} - \frac{z}{z-0.8825}$$

Tomando la transformada inversa z a la expresión anterior se obtiene:

$$b(kT) = 1 + (0.7788)^k - 2(0.8825)^k \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Si se utiliza MATLAB, el programa que resuelve el problema es el siguiente:

```
% Respuesta al escalón unitario
n=[0.125];
d1=[1 0.5];
d2=[1 0.25];
d=conv(d1,d2);                  % Multiplica dos polinomios
[nd,dd]=c2dm(n,d,0.5,'zoh');    % Conversión de continuo a discreto
r=ones(1,20);                   % Genera un escalón unitario
y=filter(nd,dd,r);
b=y'                            % Salida b(kT)
```

Al ejecutar el programa se obtiene:

b(0)=0.0000	b(6)=0.2784	b(12)=0.6035
b(1)=0.0138	b(7)=0.3400	b(13)=0.6435
b(2)=0.0489	b(8)=0.3996	b(14)=0.6826
b(3)=0.0978	b(9)=0.4561	. . . . .
b(4)=0.1548	b(10)=0.5091	. . . . .
b(5)=0.2160	b(11)=0.5582	b(19)=0.8226

Si en la respuesta obtenida utilizando tablas, se reemplaza $k = 0, 1, 2 \ldots$se obtienen los valores para $b(kT)$ generados en el programa de MATLAB.

EJEMPLO 3.4

Hallar la salida $x(kT)$ para el sistema mostrado en la figura 3.8. Asuma un periodo de muestreo $T = 1\ s$ y que la entrada $e(t)$ es un escalón unitario.

$$G_1(S) = \frac{8}{5S+1} \qquad G_2(S) = \frac{3}{6S+1}$$

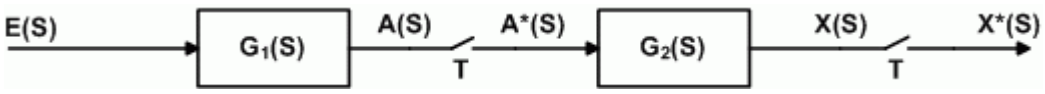


Figura 3.8 Sistema para el ejemplo 3.4

SOLUCION: Para el sistema de la figura 3.8 se cumple:

$$X(S) = G_2(S)A^*(S)$$
$$A(S) = G_1(S)E(S) = G_1E(S)$$
$$A^*(S) = [G_1E(S)]^*$$

Por lo tanto:

$$X(S) = G_2(S)[G_1E(S)]^*$$
$$X^*(S) = G_2^*(S)[G_1E(S)]^*$$

Es decir:

$$X(z) = G_2(z)G_1E(z)(z)$$

En este caso no es posible hallar la función de transferencia $X(z)/Y(z)$, puesto que $E(Z)$ no se puede sacar como factor común.

Entonces:

$$G_1E(z) = \Im\{G_1E(S)\} = \Im\left\{\frac{8}{S(5S+1)}\right\} = \frac{1.4z}{(z-1)(z-0.81873)}$$

$$G_2(z) = \Im\{G_2(S)\} = \Im\left\{\frac{3}{6S+1}\right\} = \frac{0.5z}{z-0.84648}$$

$$X(z) = \frac{0.5z}{(z-0.84648)} * \frac{1.4z}{(z-1)(z-0.81873)} = \frac{0.725z^2}{(z-1)(z-0.84648)(z-0.81873)}$$

Expandiendo X(z)/z en fracciones parciales, se obtiene:

$$X(z) = \frac{26.05z}{z-1} + \frac{118z}{z-0.81873} - \frac{144.05z}{z-0.84648}$$

Finalmente, la transformada inversa z, permite obtener la salida $x(kT)$ del sistema:

$$x(kT) = 26.05 + 118(0.81873)^k - 144.05(0.84648)^k \qquad k = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Al evaluar $x(kT)$ para algunos valores de k se obtiene:

$x(0) = 0.00000$ $\quad$ $x(5) = 6.85870$ $\quad$ $x(10) = 14.81630$

$x(1) = 0.72523$ $\quad$ $x(6) = 8.60107$ $\quad$ . . . . .

$x(2) = 1.93275$ $\quad$ $x(7) = 10.29432$ $\quad$ . . . . .

$x(3) = 3.44091$ $\quad$ $x(8) = 11.90643$ $\quad$ . . . . .

$x(4) = 5.11545$ $\quad$ $x(9) = 13.41792$ $\quad$ $x(\infty) = 26.0555$

3.4 SISTEMAS DE LAZO ABIERTO CON FILTROS DIGITALES INCLUIDOS

La figura 3.9a representa un sistema de lazo abierto en el cual, el convertidor A/D convierte la señal de tiempo continuo $e(t)$ en un secuencia de números $e(kT)$, el filtro digital procesa esa secuencia de números y genera otra secuencia de números $m(kT)$, la cual es convertida en una señal continua $m(t)$ en el convertidor D/A [3.3]

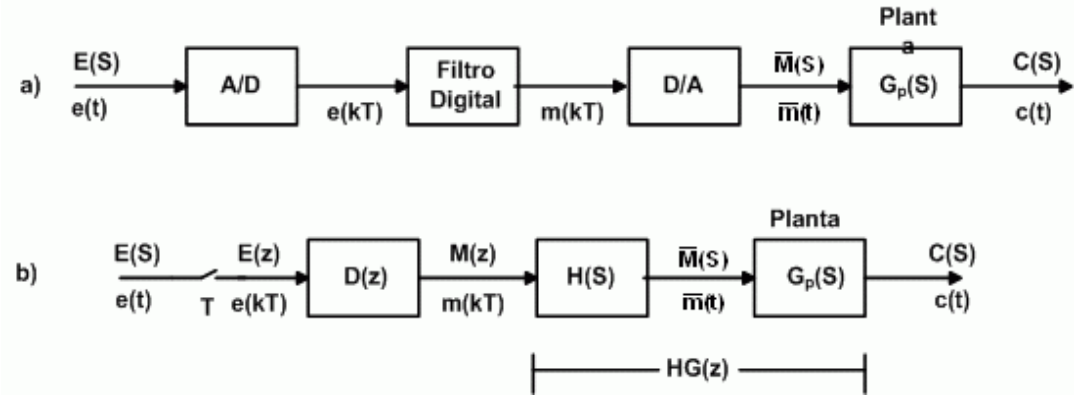


Figura 3.9 a) Sistema en lazo abierto con un filtro digital b) Modelo equivalente de la figura 3.9a

Un filtro digital que resuelve una ecuación de diferencias lineal y con coeficientes constantes, se puede representar por una función de transferencia de pulso $D(z)$ tal que:

$$M(z) = D(z)E(z) \tag{3.14}$$

De 3.14 se obtiene:

$$M^*(S) = D^*(S)E^*(S) \tag{3.15}$$

Usualmente el convertidor D/A tiene, a la salida, la característica de un retenedor de orden cero por lo tanto:

$$\bar{M}(S) = \left(\frac{1 - e^{-ST}}{S}\right) M^*(S)$$

Entonces:

$$C(S) = G_p(S)\bar{M}(S) = G_p(S)\left(\frac{1 - e^{-ST}}{S}\right) M^*(S)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 3.15 resulta:

$$C(S) = \left[\left(\frac{1 - e^{-ST}}{S}\right) G_p(S)\right] D^*(S)E^*(S) \tag{3.16}$$

Tomando la transformada z a la ecuación 3.16:

$$C(z) = (1 - z^{-1})\Im\left[\frac{G_p(S)}{S}\right] D(z)E(z) = G(z)D(z)E(z) \tag{3.17}$$

En donde:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\Im\left[\frac{G_p(S)}{S}\right]$$

La figura 3.9b muestra el sistema equivalente del correspondiente a la figura 3.9 a

EJEMPLO 3.5

Determinar la respuesta del sistema de la figura 3.9 ante una entrada en escalón unitario. Asumir que el periodo de muestreo es $T = 0.2\ s$, que el filtro digital está descrito por la ecuación de diferencias:

$$m(k) = 2e(k) - e(k-1) \qquad \text{y que} \qquad G_p(S) = \frac{1}{S+1}$$

SOLUCIÓN: De acuerdo con la figura 3.9a $D(z) = M(z)/E(z)$. Tomando la transformada z a la ecuación que describe el filtro:

$$M(z) = (2 - z^{-1})E(z)$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = 2 - z^{-1} = \frac{2z - 1}{z}$$

Ahora bien:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

Es decir:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{1}{S(S+1)}\right\} = \frac{0.18127}{z - 0.81873}$$

Como la entrada es un escalón unitario:

$$E(z) = \frac{z}{z - 1}$$

Reemplazando $D(z)$,$G(z)$ y $E(z)$ en la ecuación 3.17 se obtiene:

$$C(z) = D(z)G(z)E(z) = \frac{2z - z}{z} * \frac{0.18127}{z - 0.81873} * \frac{z}{z - 1}$$

$$C(z) = \frac{0.18127(2z - 1)}{(z - 1)(z - 0.81873)}$$

Expandiendo C(z) en fracciones parciales resulta:

$$C(z) = \frac{1}{z - 1} - \frac{0.63746}{z - 0.81873}$$

Tomando la transformada inversa z a la expresión anterior se obtiene:

$$c(kT) = \begin{cases} 1 - 0.6376(0.81873)^{k-1} & k = 1, 2, 3 \ldots \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

A continuación se presentan valores de $c(kT)$ para $0 \leq k \leq 10$,obtenidos utilizando MATLAB.

$c(0) = 0.0000$	$c(3) = 0.6500$	$c(6) = 0.8079$	$c(9) = 0.8946$
$c(1) = 0.4779$	$c(4) = 0.7135$	$c(7) = 0.8427$	$c(10) = 0.9137$
$c(2) = 0.5726$	$c(5) = 0.7654$	$c(8) = 0.8712$	$c(\infty) = 1.000$

La ganancia DC del sistema está dada por:

$$K_{DC} = \lim_{z\to 1} D(z) * \lim_{S\to 0} G_p\,(S)$$

$$K_{DC} = \lim_{z\to 1} \frac{2z-1}{z} * \lim_{S\to 0} \frac{1}{S+1} = 1$$

3.5 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO PARA UN SISTEMA EN LAZO CERRADO.

La figura 3.10a muestra el diagrama en bloques de un sistema de control digital en lazo cerrado, en el cual se asume que la dinámica de todos los elementos es significativa. Sin embargo, a éste sistema se le pueden efectuar algunas simplificaciones. Por ejemplo, si el modelo del sistema fue obtenido experimentalmente, la función de transferencia del proceso $G_p(S)$ incluye la dinámica del elemento final de control y la del sistema de medición. En este caso, el diagrama de bloques de la figura 3.10a se reduce al dado en la figura 3.10b.

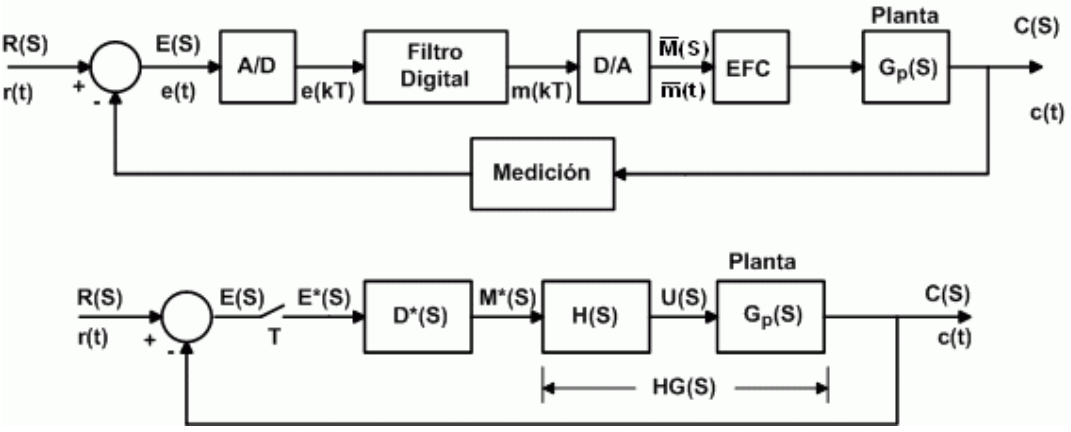


Figura 3.10 a) Sistema de control con todas las dinámicas incluidas. b) Sistema simplificado

Para obtener la función de transferencia de pulso en lazo cerrado de un sistema de control digital como el que se muestra en la figura 3.10b, se utiliza un procedimiento análogo al empleado para obtener la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema continuo.

Es decir:

$$HG(S) = H(S)G_p(S)$$

$$C(S) = HG(S)D^*(S)E^*(S)$$

$$C^*(S) = HG^*(S)D^*(S)E^*(S)$$

Tomando la transformada z:

$$C(z) = HG(z)D(z)E(z)$$

$$E(z) = R(z) - C(z)$$

$$C(z) = HG(z)D(z)[R(z) - C(z)]$$

Por lo tanto, la función de transferencia de pulso de lazo cerrado, para el sistema de la figura 3.10b es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} \qquad 3.18$$

En donde:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad 3.19$$

Cuando el retenedor es de orden cero y:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad 3.20$$

Cuando $G_p(S)$ presenta retardo o tiempo muerto. En este caso, para evaluar la transformada z modificada, se utiliza el procedimiento expuesto en la sección 2.4

EJEMPLO 3.6

Para el sistema de control discreto mostrado en la figura 3.11, hallar a) La función de transferencia de pulso en lazo cerrado. b) La respuesta $c(kT)$ si $r(t)$ es un escalón unitario. Asuma que el periodo de muestreo es $T = 1\ s$, que $H(S)$ es un retenedor de orden cero y que $D(z)$ es un controlador digital con función de transferencia:

$$D(z) = \frac{1.5z - 1.2}{z - 1}$$

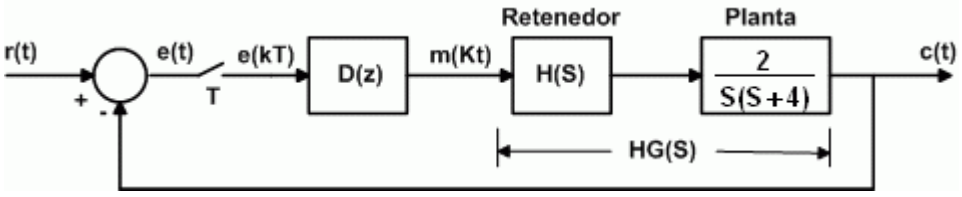


Figura 3.11 Sistema de control para el ejemplo 3.6

a) SOLUCIÓN ANALÍTICA: La función de transferencia de pulso para el sistema planta-retenedor está dada por la ecuación 3.19:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{2}{S^2(S+4)}\right\}$$

De tablas se encuentra que:

$$\Im\left\{\frac{a^2}{S^2(S+a)}\right\} = \frac{[(aT - 1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]z}{(z-1)^2(z - e^{-aT})}$$

Con $T = 1\ s$ y $a = 4$ se obtiene, después de simplificar:

$$HG(z) = \frac{0.37728(z + 0.30096)}{(z-1)(z - 0.01831)}$$

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\dfrac{0.37728(z + 0.30096)}{(z-1)(z - 0.01831)} * \dfrac{(1.5z - 1.2)}{z-1}}{1 + \dfrac{0.37728(z + 0.30096)}{(z-1)(z - 0.01831)} * \dfrac{(1.5z - 1.2)}{z-1}}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.37728(z + 0.30096)(1.5z - 1.2)}{z^3 - 1.45238z^2 + 0.75421z - 0.15457}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.37728(z + 0.30096)(1.5z - 1.2)}{(z - 0.67298)(z^2 - 0.77939 + 0.22969)}$$

Si $r(t)$ es un escalón unitario, $R(z) = z/(z-1)$, por lo tanto:

$$C(z) = G_w(z)R(z) = \frac{0.37728z(z + 0.30096)(1.5z - 1.2)}{(z - 1)(z - 0.67298)(z^2 - 0.77939z + 0.22969)}$$

Al expandir $C(z)/z$ en fracciones parciales se obtiene:

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{1}{z - 1} - \frac{2.354z - 0.48948}{z^2 - 0.77939z + 0.22969} + \frac{1.3544}{z - 0.67298}$$

Utilizando tablas se obtiene la transformada inversa z de $C(z)$ así:

$$c(kT) = 1 + 1.3544(0.67298)^k - [2.3542\cos(0.621k) + 1.5339\sin(0.621k)](0.4792)^k$$

b) Solución utilizando MATLAB**:**

```
% Entrar la planta continua
n=[2];
d=[1 4 0];
% Discretizar la planta continua
[nd,dd]=c2dm(n,d,1,'zoh');
%  Entrar el controlador discreto
nc=[1.5 -1.2];
dc=[1 -1];
% Multiplicar planta discreta por el controlador
[ns,ds]=series(nc,dc,nd,dd);
% Función de transferencia de lazo cerrado
[nw,dw]=cloop(ns,ds,-1);
% Mostrar función de transferencia de pulso en lazo cerrado
printsys(nw,dw,'z')
pause
% Evaluar la respuesta del sistema
k=0:39;
r=ones(1,40);
y=filter(nw,dw,r);
c=y'
```

Al ejecutar el programa se obtiene:

$c(0) = 0.0000$	$c(7) = 1.0594$	$c(14) = 1.0036$
$c(1) = 0.5659$	$c(8) = 1.0372$	$c(15) = 1.0024$
$c(2) = 1.1055$	$c(9) = 1.0244$	$c(16) = 1.0016$
$c(3) = 1.3260$	$c(10) = 1.0165$	$c(17) = 1.0011$
$c(4) = 1.2421$	$c(11) = 1.0113$	$c(18) = 1.0007$
$c(5) = 1.1599$	$c(12) = 1.0078$	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$
$c(6) = 1.0979$	$c(13) = 1.0053$	$c(40) = 1.0000$

3.6 PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO EN LAZO CERRADO

La determinación de la función de transferencia de pulso de lazo cerrado, en sistemas de datos muestreados, es compleja pues no existe una función de transferencia para el muestreador. Un procedimiento útil para determinar la función de transferencia de pulso en lazo cerrado, consiste en elaborar su diagrama de flujo de señales original omitiendo en él la representación del muestreador como se indica en las figuras 3.12a y 3.12b.

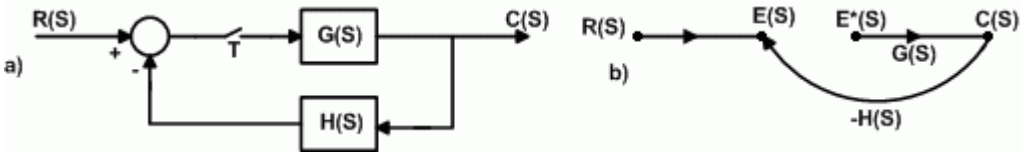


Figura 3.12 a) Sistema de control de datos muestreados. b) Diagrama de flujo equivalente del sistema.

La señal de salida muestreada $C^*(S)$ se puede obtener siguiendo paso a paso el procedimiento que se presenta a continuación [3.4]

1. Construir el diagrama original de flujo de señales del sistema. Inicialmente se considera que los muestreadores están abiertos.

2. Asignar una variable a la entrada de cada muestreador. La salida del muestreador será la misma variable con asterisco. [$E(S)\ y\ E^*(S)$].
3. Considerar la salida de cada muestreador como un nodo fuente (Nodo de entrada) y expresar la entrada a cada muestreador y la salida del sistema en función de la salida de cada muestreador. Para el sistema de la figura 3.12 b se tiene:

$$E(S) = R(S) - GH(S)E^*(S) \qquad 3.21$$

$$C(S) = G(S)E^*(S) \qquad 3.22$$

Se hace notar que en la ecuación 3.21

$$GH(S) = G(S).H(S)$$

4. Tomar la "transformada asterisco" a las ecuaciones obtenidas y resolverlas por el método conveniente con el fin de evaluar $C^*(S)$. Para el ejemplo que se analiza resulta:

$$E^*(S) = R^*(S) - GH^*(S)E^*(S) \qquad 3.23$$

$$C^*(S) = G^*(S)E^*(S) \qquad 3.24$$

De la ecuación 3.23 se obtiene:

$$E^*(S) = \frac{R^*(S)}{1 + GH^*(S)} \qquad 3.25$$

Reemplazando la ecuación 3.25 en la 3.24 se obtiene:

$$C^*(S) = \frac{G^*(S)R^*(S)}{1 + GH^*(S)}$$

$$G_w^*(S) = \frac{C^*(S)}{R^*(S)} = \frac{G^*(S)}{1 + GH^*(S)} \qquad 3.26$$

En términos de la transformada z resulta:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \qquad 3.27$$

La ecuación 3.27 corresponde entonces, a la función de transferencia en lazo cerrado del sistema discreto.

EJEMPLO 3.7

Para el sistema que se da en la figura 3.13, determinar la salida $C(z)$ en función de la entrada y las funciones de transferencia dadas [3.5]

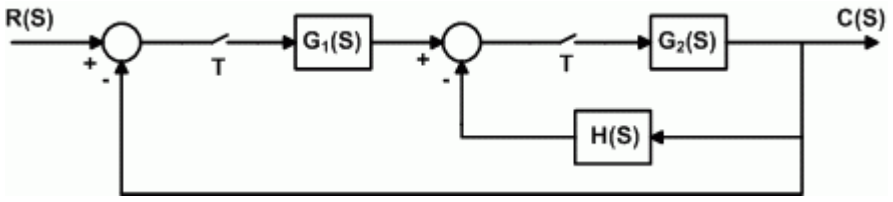


Figura 3.13 sistema de control para el ejemplo 3.7

SOLUCIÓN: La figura 3.14 muestra el diagrama de flujo original correspondiente al sistema dado en la figura 3.13:

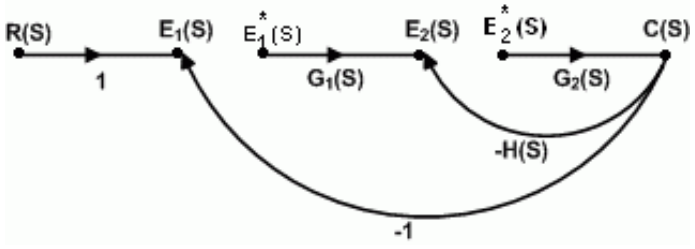


Figura 3.14 diagrama de flujo para el sistema de la figura 3.13

Del diagrama de la figura 3.14 se obtiene:

$$E_1(S) = R(S) - G_2(S)E_2^*(S)$$
$$E_2(S) = G_1(S)E_1^*(S) - G_2H(S)E_2^*(S)$$
$$C(S) = G_2(S)E_2^*(S)$$

De las ecuaciones anteriores resulta que:

$$E_1^*(S) = R^*(S) - G_2^*(S)E_2^*(S)$$
$$E_2^*(S) = G_1^*(S)E_1^*(S) - G_2H^*(S)E_2^*(S)$$
$$C^*(S) = G_2^*(S)E_2^*(S)$$

A partir de estas ecuaciones, se puede obtener el diagrama de flujo de las señales muestreadas como se indica en la figura 3.15. Para hallar la función de transferencia de pulso se utiliza, en este caso, la fórmula de ganancia de Mason.

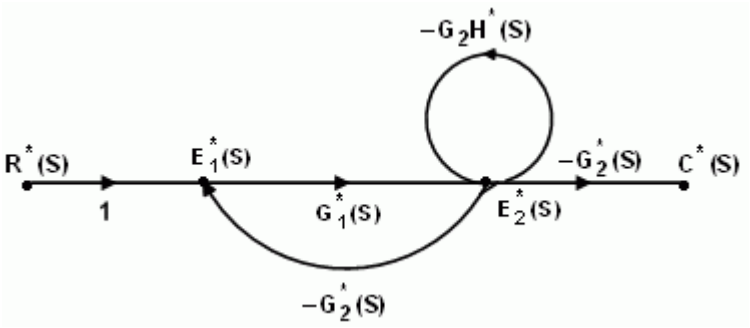


Figura 3.15 Diagrama de flujo de señales muestreadas para el ejemplo 3.6

Utilizando la fórmula de ganancia de Mason:

Lazos directos:

$$L_1 = G_1^*(S)G_2^*(S) \qquad \Delta_1 = 1$$

Ganancias de lazo:

$$M_1 = -G_1^*(S)G_2^*(S)$$

$$M_2 = -G_2H^*(S)$$

$$\Delta = 1 + G_1^*(S)G_2^*(S) + G_2H^*(S)$$

$$G_w^*(S) = \frac{1}{\Delta}\sum L_i\,\Delta_i$$

En términos de la transformada z resulta:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z) + G_2H(z)}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

3.1 Demostrar la validez de las siguientes relaciones:

$$[F(S)G^*(S)]^* = F^*(S)G^*(S)$$

$$[F(S)G(S)]^* \neq F^*(S)G^*(S)$$

3.2 Un proceso tiene como función de transferencia:

$$G(S) = \frac{1}{S+2} \qquad T = 0.2\ s$$

a) Obtener la función de transferencia de pulso $G(z)$. b) Si se asume que el proceso está precedido por un retenedor de orden cero, hallar la función de transferencia de pulso $HG(z)$.

3.3 Un proceso tiene por función de transferencia:

$$G(S) = \frac{10}{S(S+4)}$$

El proceso está precedido por un retenedor de orden cero y el periodo de muestreo es 0.2 s. Determinar la función de transferencia de pulso $HG(z)$ para el sistema. Genere un programa en MATLAB que permita calcular la respuesta del sistema a un escalón unitario. Se puede evidenciar que cuando $T \to 0$, la respuesta de $HG(z)$ se aproxima a la respuesta de $G(S)$?

3.4 Hallar la función de transferencia de pulso para el sistema mostrado en la figura 3.16. $H(S)$ es un retenedor de orden cero y T se especifica para cada $G_p(S)$ así:

$a)\ G_p(S) = \dfrac{S+2}{S(S+1)} \qquad T = 0.2\ s$

$b)\ G_p(S) = \dfrac{S^2+5S+6}{S(S+4)(S+5)} \qquad T = 0.1\ s$

$c)\ G_p(S) = \dfrac{20e^{-0.1S}}{(S+2)(S+5)} \qquad T = 0.2\ s$

$d)\ G_p(S) = \dfrac{5e^{-S}}{4S+1} \qquad T = 0.8\ s$

$e)\ G_p(S) = \dfrac{2e^{-0.7S}}{S^2+2S+5} \qquad T = 0.5\ s$

$f)\ G_p(S) = \dfrac{5e^{-0.4S}}{S(S+1)} \qquad T = 0.5\ s$

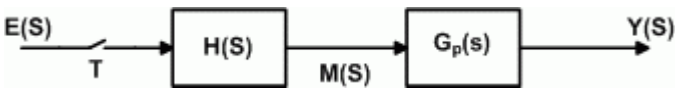


Figura 3.16 Sistema para los problemas 3.4 y 3.5

3.5 La planta $G_p(S)$ del sistema mostrado en la figura 3.16 se puede describir mediante la ecuación diferencial:

$$\dot{y}(t) + 0.05y(t) = 0.1m(t)$$

Asumiendo que el periodo de muestreo es $T = 2\,s$. a) Hallar la función de transferencia $Y(z)/E(z)$. b) Elaborar el diagrama de flujo de señales para el sistema y obtener, a partir de él, la función de transferencia $Y(z)/E(z)$. c) Hallar la respuesta $y(kT)$ del sistema cuando la entrada $e(t)$ es el delta de Kronecker. d) Escribir un programa en MATLAB para resolver las partes a) y c) del sistema.

3.6 En el sistema de la figura 3.17, el filtro digital está descrito por la ecuación:

$$m(k) = 1.8e(k) - 1.5e(k-1) + 0.5m(k-1)$$

El periodo de muestreo es $T = 0.6\,s$ y la función de transferencia de la planta está dada por:

$$G_p(S) = \frac{2e^{-0.6S}}{3S+1}$$

a) Hallar la función de transferencia de pulso $C(z)/E(z)$ para el sistema. b) Evaluar la ganancia DC a partir del resultado obtenido en a). c) Verificar la respuesta hallada en b) evaluando separadamente la ganancia DC del filtro digital $D(z)$ y la de la planta $G_p(S)$. d) Calcular la salida $c(kT)$ del sistema si $e(t)$ es un escalón unitario. e) Utilice el teorema del valor final y calcule el valor de $c(kT)$ cuando $t \to \infty$

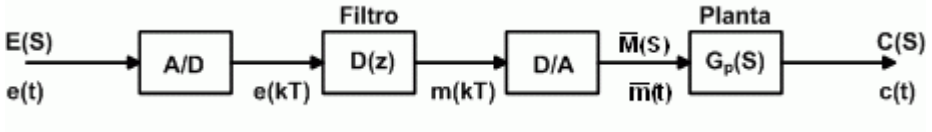


Figura 3.17 Sistema para los problemas 3.6 y 3.8

3.7 La figura 3.18 representa el diagrama en bloques de un sistema de calefacción de una habitación. La salida $c(t)$ es la temperatura de la habitación en grados centígrados y la señal de voltaje $m(t)$ maneja una válvula colocada en la

línea de vapor, el sensor es un termopar tipo J. La perturbación $d(t)$ se presenta cuando se abre la puerta de la habitación. Con la puerta cerrada $d(t) = 0$ pero, si la puerta se abre en $t = t_0$ entonces $d(t) = u(t - t_0)$. a) Si el muestreador y el retenedor (de orden cero), se implementan con un convertidor A/D y con un convertidor D/A respectivamente, dibuje el sistema resultante incluyendo los dos convertidores. b) Deduzca la función de transferencia $C(z)/E(z)$. c) Si se aplica un voltaje constante $e(t) = 10V$ durante un largo periodo de tiempo, cuál será la temperatura de estado estable en la habitación cuando la puerta está cerrada ?. d) Estime el efecto que produce, sobre la temperatura de estado estable, la apertura permanente de la puerta. [3.6]

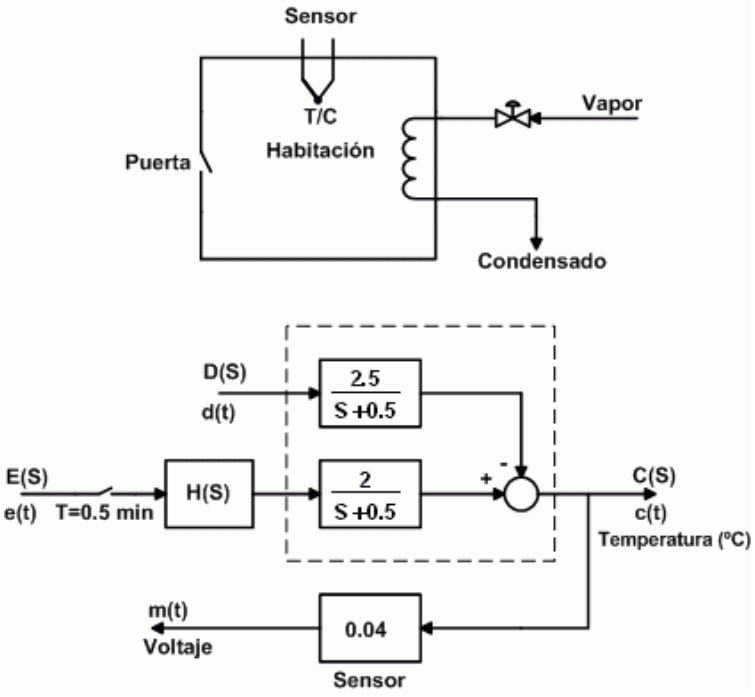


Figura 3.18 Sistema de calefacción problema 3.7

3.8 Repetir el problema 3.6 si el filtro digital se describe mediante la ecuación de diferencias:

$$m(k) = 2e(k) - 1.8e(k-1) + 0.5e(k-2) + 0.4m(k-1)$$

El periodo de muestreo es $T = 0.1\ s$ y la función de transferencia de la planta está dada por:

$$G_p(S) = \frac{4}{(S+2)(S+4)}$$

3.9 Determinar: a) la función de transferencia de pulso o la relación entre la entrada y la salida para cada uno de los sistemas que se muestran en la figura 3.19. b) Aplicar el resultado obtenido en a) cuando:

$$G_1(S) = \frac{0.5}{5S+1} \qquad G_2(S) = \frac{2}{S}$$

$$H(S) = H_1S) = H_2(S) = 1$$

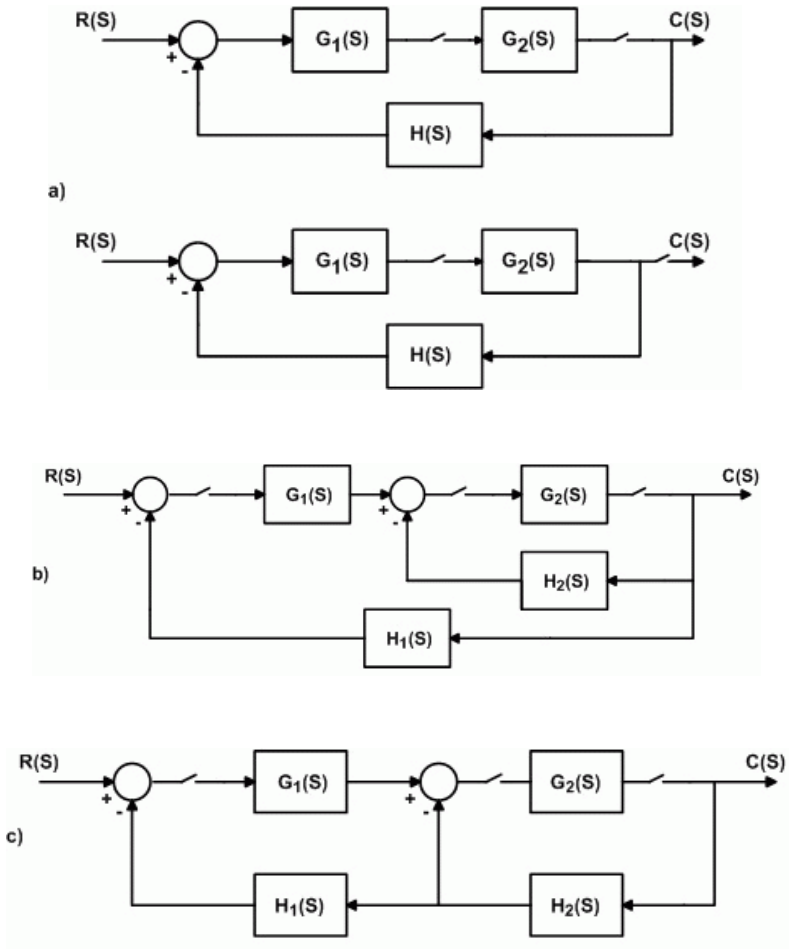


Figura 3.19 Sistemas para el problema 3.9

3.10 La figura 3.20 representa el sistema de control para una de las articulaciones de un robot. a) Si la entrada al sensor es el ángulo θ_a en grados y el movimiento de la articulación está restringido de 0º a 270º, determinar el rango de la salida del sensor. Que rango de voltaje debe tener el convertidor A/D ? b) Si $G_p(S)$ es la función de transferencia del servomotor y los engranajes y la ganancia del sensor es 0.07, determinar la función de transferencia del sistema en función de $K, G_p(S)$ etc. c) Evaluar la función de transferencia del sistema cuando $K = 2.4, D(z) = 1$ y $T = 0.1\ s$. d) Obtener $\theta_a(kT)$ cuando la entrada es $\theta_{c=}5\ V$. Cuál será el valor final de θ_a?

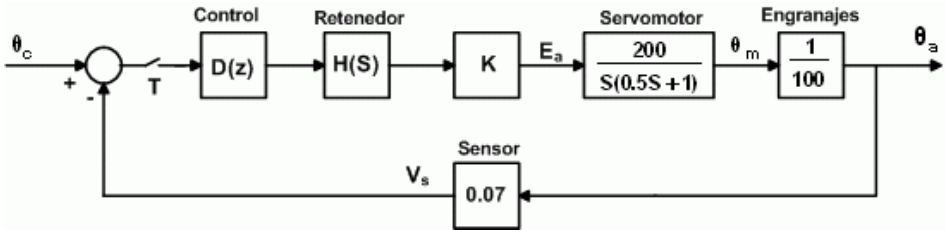


Figura 3.20 Sistema de control para el problema 3.10

3.11 Para el sistema de control mostrado en la figura 3.21 determinar a) La función de transferencia de pulso $C(z)/R(z)$. B) La respuesta $c(kT)$ cuando la señal aplicada en la referencia es un escalón unitario. c) La respuesta $c(kT)$ cuando la señal de referencia es la secuencia $r(k) = [0\ 1\ 1\ 1\ 0 \ldots 0]$. Asuma que el periodo de muestreo es $T = 0.5\ s$.

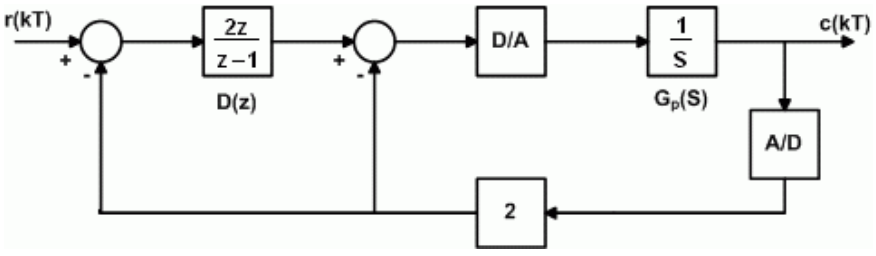


Figura 3.21 Sistema de control para los problemas 3.11 y 3.12

3.12 Resolver el problema 3.11 si el filtro digital $D(z)$ toma la forma:

$$D(z) = \frac{0.8z - 0.5}{z - 1}$$

Analice la estabilidad del sistema en lazo cerrado con el filtro propuesto.

3.13 En la figura 3.22 se da el diagrama de control digital de un sistema en cascada de flujo-presión. El flujo es la variable principal y la presión es la variable secundaria. Para identificar el sistema se le aplicó un escalón en la válvula de control FCV.

El análisis de los resultados obtenidos arrojó las siguientes características para el proceso:

- Flujo $G_f(S)$: Sistema de primer orden con retardo con constante de tiempo igual a 40 seg, ganancia 1.25 y retardo de 5 seg.
- Presión $G_p(S)$: Sistema de primer orden con retardo con constante de tiempo igual a 60 seg, ganancia 0.8 y retardo de 8 seg.
- Válvula de control $G_v(S)$: Lineal con ganancia 1
- Medidor de flujo: Ganancia 0.1
- Medidor de presión $G_p(S)$: Ganancia 0.2

Para controlar el proceso se tomó como periodo de muestreo $T = 8\,s$ y se ajustaron los controladores así:

- Controlador de presión $D_p(z)$: proporcional con ganancia 6
- Controlador de flujo $D_f(z)$: proporcional con ganancia 5

a) Represente el sistema mediante un diagrama en bloques incluyendo todas las dinámicas del mismo. b) Obtenga la función de transferencia de pulso del sistema $F(z)/R(z)$ en donde $F(z)$ es el flujo a la salida del tanque y $R(z)$ es el valor deseado para el flujo (SPF), cuales son las raíces de la ecuación característica del sistema? c) Obtenga la respuesta $f(kT)$ cuando $r(t)$ es un escalón unitario d) Cual es el valor del flujo cuando $k \to \infty$?

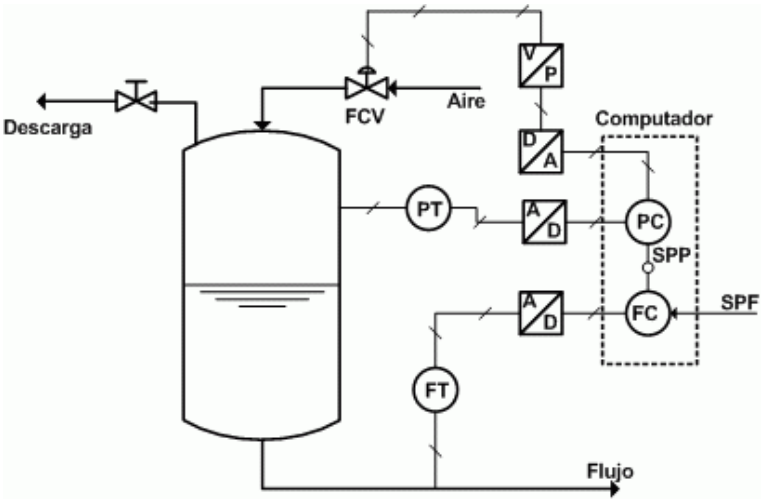


Figura 3.22 Sistema en cascada flujo-presión

3.14 Para cada uno de los diagramas de bloques de la figura 3.23 a) Obtener la respuesta $y(kT)$ si la entrada $r(t)$ es un escalón unitario. b) Comprobar el resultado obtenido en la parte a) utilizando SIMULINK. Asuma que $T = 1\,s$.

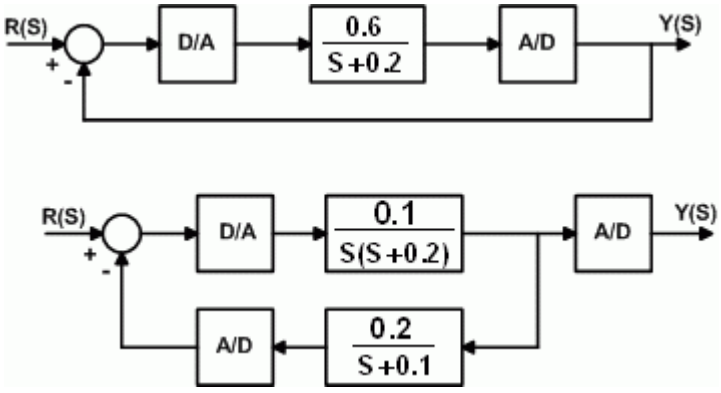


Figura 3.23 Sistemas para el problema 3.14

3.15 La figura 3.24 corresponde al diagrama de control digital de temperatura de un reactor encamisado. El sistema se muestreo cada 0.5 min. Un estudio de la dinámica del sistema arrojó los siguientes resultados:

- Tanque: $G_p(S)$: Primer orden, ganancia 2, constante de tiempo 10 min.
- Pared: $G_m(S)$: Primer orden, ganancia 0.5, constante de tiempo 2 min.
- Camisa: $G_c(S)$: Primer orden, ganancia 0.2, constante de tiempo 4 min.
- $TT1$: $H1(S)$: Primer orden, ganancia 0.5, constante de tiempo 0.2 min.
- $TT2$: $H2(S)$: Primer orden, ganancia 0.5, constante de tiempo 0.2 min.
- $TIC1$: $D1(Z)$. Control proporcional con ganancia 5.
- $TIC2$: $D2(z)$. Control proporcional con ganancia 2.
- TCV: $G_v(S)$. Válvula de control, lineal con ganancia 1.
- V/P: Conversor de voltaje a presión, ganancia unitaria.

a) Elaborar el diagrama de bloques del sistema incluyendo todas sus dinámicas. b) Obtener la función de transferencia de pulso $\theta_p(z)/\theta_R(z)$, en donde $\theta_p(z)$es la temperatura del producto en el tanque y $\theta_R(z)$ es la temperatura de referencia (SP1). c) Calcular el valor de la temperatura de salida en estado estable si $\theta_R(t) = 90u(t)$. d) Comprobar la respuesta obtenida en el literal c utilizando SIMULINK.

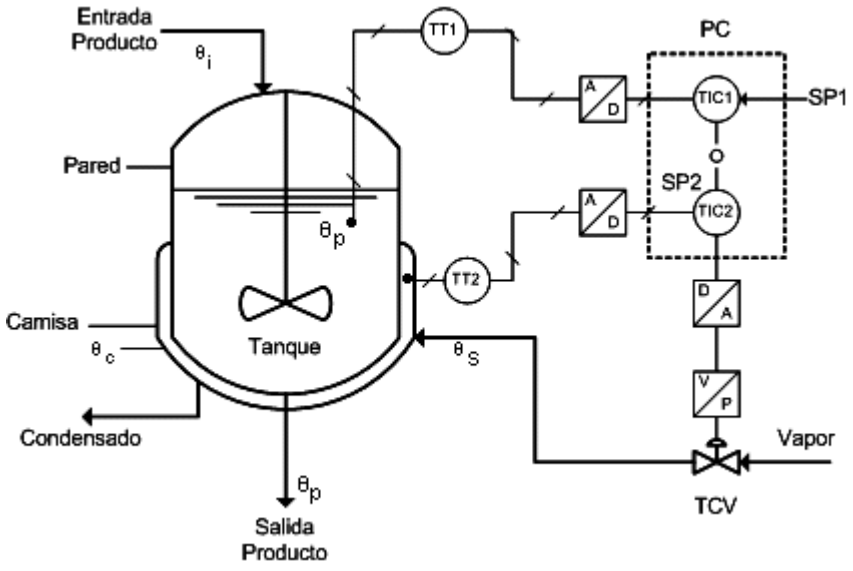


Figura 3.24 Reactor encamisado para el problema 3.15

3.16 Para los sistemas de control de la figura 3.25 hallar la función de transferencia en lazo cerrado $C(z)/R(z)$. Asuma que el periodo de muestreo es 2 seg.

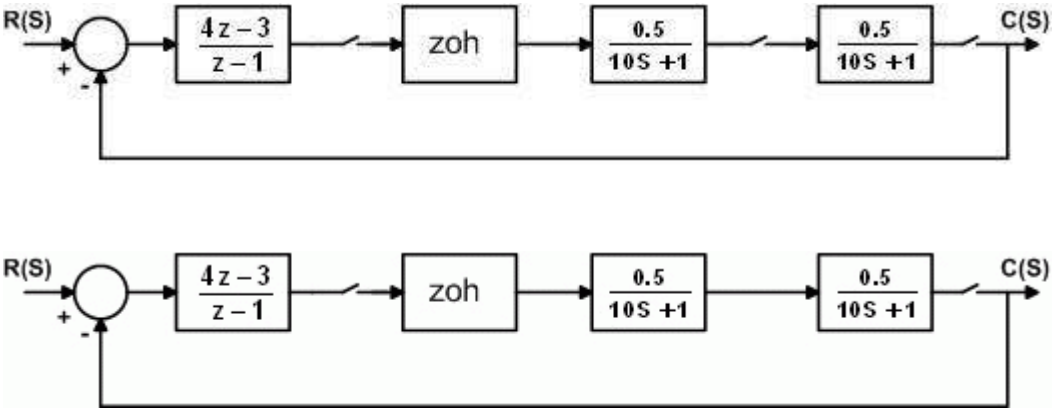


Figura 3.25 Sistemas de control para el problema 3.16

3.17 Para el sistema de control de la figura 3.26 a) Obtenga la función de transferencia de lazo abierto $G(z) = Y(z)/E(z)$ y la función de transferencia de lazo cerrado $G_w(z) = Y(z)/R(z)$ en función del periodo de muestreo T. b) Si se eliminan los retenedores y los muestreadores se obtiene el sistema análogo correspondiente al sistema digital dado. Obtenga las funciones de transferencia de lazo abierto y de lazo cerrado del sistema continuo tomando el límite de $G(z)$ y $G_w(z)$ cuando T tiende a cero.

$$G_C(S) = \frac{0.4(5S+1)}{S} \qquad G_1(S) = \frac{0.1}{S+0.2} \qquad G_2(S) = \frac{0.8}{S+1}$$

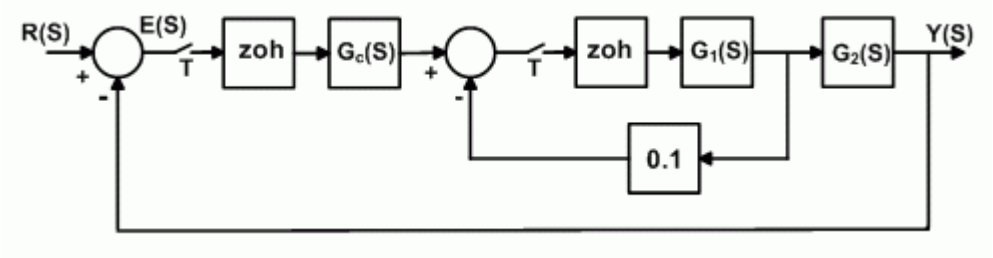


Figura 3.26 Sistema para el problema 3.17

3.18 Para los sistemas de control digital dados en la figura 3.27 hallar la respuesta $c(kT)$ al delta de Kronecker

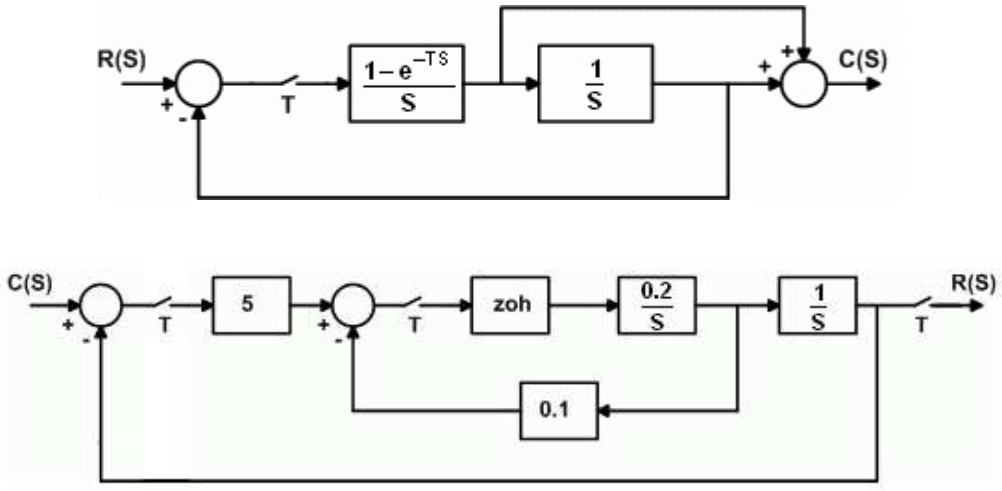


Figura 3.27 Sistemas de control para el problema 3.18

REFERENCIAS

[3.1] Kuo, Benjamín. *Sistemas de Control Automático*. Prentice Hall. México. 1996

[3.2] Ogata, Katsuhiko. *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice Hall. México. 1996.

[3.3] Phillips, Charles. Nagle, Troy. *Digital Control Systems Analysis and Design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey. 1995.

[3.4] Phillips, Charles. Nagle, Troy. *Digital Control Systems Analysis and Design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey. 1995.

[3.5] Leigh, J. R. *Applied Digital Control. Theory Design and Implementation*. Prentice hall. Englewood Cliffs, New Jersey. 1992.

[3.6] Phillips, Charles. Nagle, Troy. *Digital Control Systems Analysis and Design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey. 1995.

CAPITULO CUATRO

MÉTODOS DE ANÁLISIS PARA SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO

En este capítulo se presentan los métodos básicos para el análisis de sistemas de control en tiempo discreto. Se esboza, inicialmente, la correspondencia entre el plano S y el plano z, luego se plantea el análisis de estabilidad de los sistemas de control en lazo cerrado en el plano z así como las características de respuesta transitoria y de estado permanente y por último, se exponen los temas correspondientes al método del lugar geométrico de las raíces, utilizando configuraciones de polos y ceros en el plano z y al método de respuesta en frecuencia en el plano w.

4.1 EL PLANO Z Y SU RELACIÓN CON EL PLANO S

En los sistemas de control en tiempo continuo, la localización de los polos y de los ceros en el plano S permite establecer el comportamiento dinámico del sistema.

Por analogía, en los sistemas discretos, la ubicación de los polos y de los ceros en el plano z posibilita analizar el desempeño del sistema discreto.

Cuando en el proceso se involucra un muestreo por impulsos, las variables complejas z y S se relacionan, como se vio en el capítulo dos, mediante la ecuación:

$$z = e^{ST} \tag{4.1}$$

La ecuación 4.1 significa que un polo en el plano S se puede ubicar en el plano z utilizando la transformación $z = e^{ST}$ [4.1].

Teniendo en cuenta que la variable compleja S está formada por una parte real y una parte imaginaria, es decir: $S = \sigma \pm jw$, la ecuación 4.1 se puede escribir como:

$$z = e^{T(\sigma + jw)} = e^{\sigma T} e^{jwT} \tag{4.2}$$

Pero:

$$e^{jwT} = \cos(wT) + jsin(wT) \tag{4.3}$$

Reemplazando la ecuación 4.3 en la 4.2 se obtiene:

$$z = e^{\sigma T}(coswT + jsinwT) \tag{4.4}$$

De la ecuación 4.4 resulta que:

$$z = e^{\sigma T} \angle wT \tag{4.5}$$

Dado que σ es negativo en el semiplano izquierdo del plano S, el plano izquierdo del semiplano S corresponde a:

$$|z| = e^{\sigma T} < 1 \tag{4.6}$$

El eje imaginario jw en el plano S corresponde a $|z| = 1$. Es decir, el eje imaginario en el plano S (la línea $\sigma = 0$), corresponde al contorno del círculo unitario en el plano z y el interior del círculo unitario en el plano z corresponde al semiplano izquierdo del plano S.

Para un sistema de segundo orden, con función de transferencia dada por:

$$G(S) = \frac{w_n^2}{S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2} \tag{4.7}$$

Las raíces de la ecuación característica: $S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2 = 0$ son:

$$S_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1-\xi^2} \qquad 4.8$$

En donde ξ es el coeficiente de amortiguamiento y w_n es la frecuencia natural del sistema. Utilizando la ecuación 4.1 se obtiene:

$$z = e^{-\xi w_n T} \angle \pm w_n T \sqrt{1-\xi^2} = |z| \angle \pm \theta \qquad 4.9$$

Haciendo $w_d = w_n \sqrt{1-\xi^2}$, la ecuación 4.9 se transforma en:

$$z = e^{-\xi w_n T} \angle \pm w_d T \qquad 4.10$$

El ángulo $w_d T$ está dado en radianes. Si se quiere expresar en grados, la ecuación 4.9 se puede reescribir como:

$$|z| = e^{-\xi w_n T}$$

$$\theta = 57.3 w_n T \sqrt{1-\xi^2} \qquad 4.11$$

En resumen: La relación $z = e^{ST}$ se puede utilizar para obtener la función discreta $G(z)$ a partir de la función continua $G(S)$. La única dificultad se presenta con los ceros de $G(S)$ y con la ganancia DC de $G(z)$. Pero, esta dificultad se puede obviar así: sea $G(S) = P(S)/Q(S)$ y supóngase que el orden de los polinomios $P(S)$ y $Q(S)$ son m y n respectivamente. El sistema es realizable físicamente si $m \leq n$. Si $m < n$ se puede asumir que $G(S)$ tiene $n - m$ ceros en el infinito. Para obtener $G(z)$ se debe tener en cuenta que cada cero de $G(S)$ en el infinito, representa un cero en $z = -1$ en $G(z)$. La ganancia DC necesaria para $G(z)$ se puede determinar haciendo cumplir la ecuación [4.2]:

$$\lim_{S \to 0} G(S) = \text{K.} \lim_{z \to 1} G(z) \qquad 4.12$$

EJEMPLO 4.1

Dada la función de transferencia:

$$G(S) = \frac{S+1}{(S+2)(S+3)(S+5)}$$

Determinar la función discreta equivalente $G(z)$ utilizando la trasformación $z = e^{ST}$ con $T = 0.1\ s$.

SOLUCIÓN: En este caso, $m = 1$ y $n = 3$ pues $G(S)$ tiene un cero en $S = -1$ y tres polos en $S = -2$, $S = -3$ y $S = -5$. Por lo tanto, $G(S)$ tiene $n - m = 2$ ceros en el infinito y $G(z)$ tendrá dos ceros en $z = -1$.

Entonces:

$$G(z) = \frac{(z+1)^2(z - e^{-0.1})}{(z - e^{-0.2})(z - e^{-0.3})(z - e^{-0.5})} = \frac{(z+1)^2(z - 0.9048)}{(z - 0.8187)(z - 0.7408)(z - 0.6065)}$$

El valor de K necesario para ajustar la ganancia DC de $G(z)$ se obtiene a partir de la ecuación 4.12:

$$\lim_{S \to 0} \frac{S+1}{(S+2)(S+3)(S+5)} = K . \lim_{z \to 1} \frac{(z+1)^2(z - 0.9048)}{(z - 0.8187)(z - 0.7408)(z - 0.6065)}$$

$$\frac{1}{30} = 20.593 . K \qquad\qquad K = 0.001618$$

Así, la función de transferencia discreta es, en definitiva:

$$G(z) = \frac{0.001618(z+1)^2(z - 0.9048)}{(z - 0.8187)(z - 0.7408)(z - 0.6065)}$$

La figura 4.1 muestra las respuestas de $G(S)$ y de $G(z)$ a un escalón unitario. Como puede verse, las dos respuestas son similares. Este hecho da una idea de lo útil de éste método para obtener $G(z)$ a partir de $G(S)$.

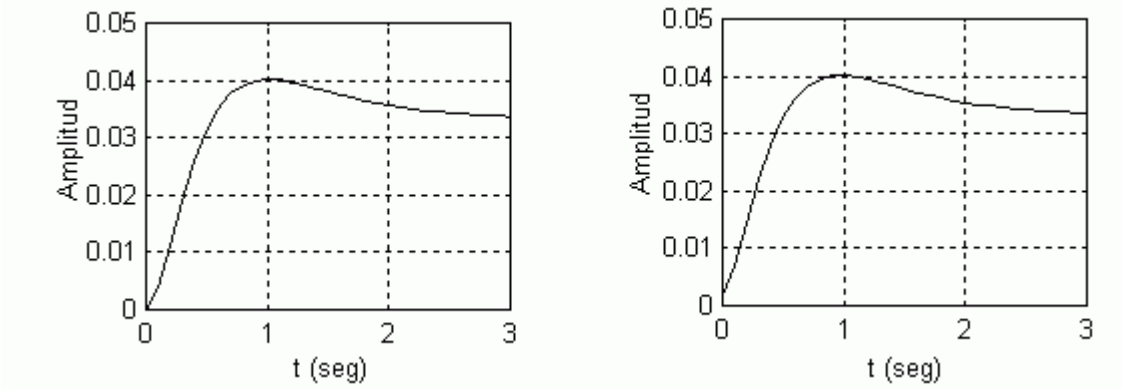


Figura 4.1 a) Respuesta de G(S) al escalón unitario b) Respuesta de G(z) al escalón unitario

4.2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS DISCRETOS

Para el sistema de control en tiempo discreto que se muestra en la figura 4.2, la función de transferencia de pulso en lazo cerrado está dada por:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \qquad 4.13$$

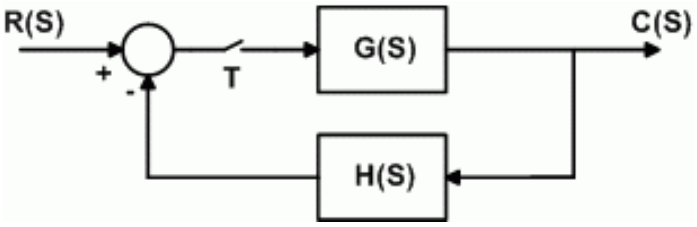


Figura 4.2 Sistema de control discreto

La estabilidad del sistema discreto definido por la ecuación 4.13 se puede determinar mediante la ubicación de los polos de lazo cerrado en el plano z es decir, por las raíces de la ecuación característica:

$$Q(z) = 1 + GH(z) = 0 \qquad 4.14$$

En la siguiente forma:

- El sistema es estable si todos sus polos de lazo cerrado ó las todas la raíces de su ecuación característica están ubicados dentro del círculo unitario del plano z. Cualquier polo de lazo cerrado localizado fuera del círculo unitario genera un sistema inestable.
- Un polo simple localizado sobre el circulo unitario $(z = 1)$, hace que el sistema sea críticamente estable, igual cosa sucede si existe un solo par de polos complejos conjugados ubicados sobre el círculo unitario. Cualquier polo múltiple ubicado sobre el círculo unitario hace que el sistema sea inestable.
- Los ceros de lazo cerrado no afectan la estabilidad del sistema y, por lo tanto, pueden estar localizados en cualquier parte del plano z.

La estabilidad absoluta de un sistema discreto se puede determinar por diferentes métodos aplicables a la ecuación característica del sistema sin necesidad de encontrar sus raíces. Dos de estos métodos son la prueba de estabilidad de Jury y el criterio de estabilidad de Routh, basado en la transformación bilineal.

La figura 4.3 representa las regiones de estabilidad y de inestabilidad de un sistema discreto tomando como referencia la ubicación de sus polos con respecto al círculo unitario.

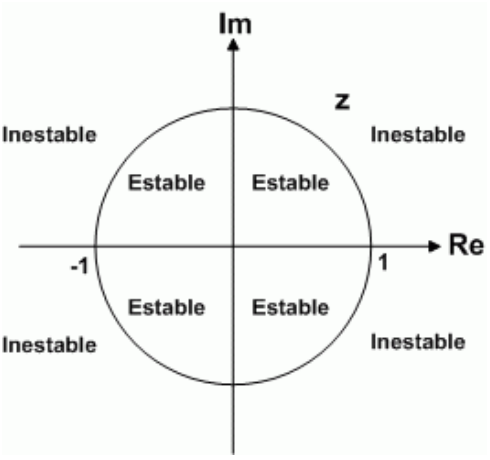


Figura 4.3 El círculo unitario y la estabilidad de sistemas discretos

4.2.1 Prueba de estabilidad de Jury: Para aplicar esta prueba a la ecuación característica $Q(z) = 0$, se construye una tabla cuyos elementos está determinados por los coeficientes de $Q(z)$.

Para iniciar la prueba, se debe escribir la ecuación característica en la forma:

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots a_1 z + a_0 = 0 \qquad 4.15$$

En donde: $a_n > 0$

El arreglo de Jury se construye como se indica en la tabla 4.1: los coeficientes de la primera fila del arreglo son los coeficientes de $Q(z)$ dispuestos en orden de potencias ascendentes de z. Los elementos de la segunda fila son los coeficientes de $Q(z)$ dispuestos en orden de potencias descendentes de z. Los elementos correspondientes a las filas 3 hasta $2n-3$ se obtienen mediante los determinantes dados en la ecuación 4.16

Tabla 4.1 Forma general del arreglo de Jury

j	$Fila$	z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{n-j}	$\cdots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
0	1 2	a_0 a_n	a_1 a_{n-1}	a_2 a_{n-2}	$\cdots$	a_{n-j} a_j	$\cdots$	a_{n-2} a_2	a_{n-1} a_1	a_n a_0
1	3 4	b_0 b_{n-1}	b_1 b_{n-2}	b_2 b_{n-3}	$\cdots$	b_{n-j} b_{j-1}	$\cdots$	b_{n-2} b_1	b_{n-1} b_0	
2	5 6	c_0 c_{n-2}	c_1 c_{n-3}	c_2 c_{n-4}	$\cdots$	c_{n-j} c_{j-2}	$\cdots$	c_{n-2} c_0		
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$			
$n-3$	$2n-5$ $2n-4$	p_0 p_3	p_1 p_2	p_2 p_1	p_3 p_0					
$n-2$	$2n-3$	q_0	q_1	q_2	$\cdots$					

$$b_j = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-j} \\ a_n & a_j \end{bmatrix} \qquad b_j = \begin{bmatrix} b_0 & b_{n-1-j} \\ b_{n-1} & b_j \end{bmatrix} \qquad p_j = \begin{bmatrix} p_0 & p_{3-j} \\ p_3 & p_j \end{bmatrix} \qquad 4.16$$

Para que $Q(z) = 0$ no tenga raíces fuera o sobre el círculo unitario en el plano z, es decir, para que el sistema sea estable, se requiere el cumplimiento de $n+1$ condiciones, en donde n es el orden de la ecuación característica. Dichas condiciones se pueden resumir así [4.5]:

1. $Q(1) > 0$
2. $(-1)^n Q(-1) > 0$
3. $|a_0| < a_n$
4. $|b_0| > [b_{n-1}]$
5. $|c_0| > |c_{n-2}|$

. . . . .

$n+1$. $|q_0| > |q_2|$

El procedimiento para efectuar la prueba es el siguiente:

Paso1: Determinar si se cumplen las condiciones 1, 2 y 3. Si no se cumplen, el sistema es inestable, si se cumplen se efectúa el paso 2

Paso 2: Determinar el máximo valor de j, así:

$$j_{max} = n - 2 \qquad 4.18$$

Si $j_{max} = 0$, no se continúa el procedimiento pues la información del paso 1 es suficiente para determinar la estabilidad del sistema.

Paso 3: El máximo número de filas que ha de tener el arreglo está dado por:

$$F_{max} = 2j_{max} + 1 = 2n - 3 \qquad 4.19$$

Paso 4: Se completa el arreglo. A cada fila se le aplica la restricción. Si ésta no se cumple, no se continúa y el sistema es inestable.

EJEMPLO 4.2

Determinar la estabilidad del sistema de control discreto cuya función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z^2(z + 0.5)}{z^4 - 0.8z^3 + 0.5z^2 + 0.2z - 0.1}$$

SOLUCIÓN: La ecuación característica del sistema es:

$$z^4 - 0.8z^3 + 0.5z^2 + 0.2z - 0.1 = 0$$

$$a_4 = 1 \qquad a_3 = -0.8 \qquad a_2 = 0.5 \qquad a_1 = 0.2 \qquad a_0 = -0.1$$

Para evaluar la estabilidad el procedimiento se inicia así:

Paso 1: Verificación de las condiciones 1, 2 y 3.

1. $Q(1) > 0$ $\qquad Q(1) = 1 - 0.8 + 0.5 + 0.2 - 0.1 = 0.8 > 0$
2. $(-1)^4 Q(-1) > 0$ $\qquad Q(-1) = 1 + 0.8 + 0.5 - 0.2 - 0.1 = 2 > 0$
3. $|a_0| < a_n$ $\qquad |-0.1| < 1$

Las condiciones 1, 2 y 3 se cumplen.

Paso 2. Máximo valor de *j*

$j_{max} = n - 2 = 4 - 2 = 2$

Paso 3: Máximo número de filas del arreglo:

$F_{max} = 2j_{max} + 1 = 2n - 3 = 5$

Paso 4: Se completa el arreglo de Jury chequeando para cada etapa las condiciones respectivas. (Ver tabla 4.2)

Tabla 4.2 Arreglo de Jury para el ejemplo 4.2

j	$Fila$	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
0	1	-0.1	0.2	0.5	-0.8	1
	2	1	-0.8	0.5	0.2	-0.1
1	3	-0.99	0.78	-0.55	-0.12	
	4	-0.12	-0.55	0.78	-0.99	
2	5	0.9657	-0.8382	0.6831		

$$b_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix} = -0.99 \qquad b_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.8 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix} = 0.78$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} = -0.55 \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 1 & -0.8 \end{bmatrix} = -0.12$$

$$|b_0| > |b_3| \qquad |-0.99| > |-0.12| \qquad \text{Cumple}$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} -0.99 & -0.12 \\ -0.12 & -0.99 \end{vmatrix} = 0.9657 \qquad c_1 = \begin{vmatrix} -0.99 & -0.55 \\ -0.12 & 0.78 \end{vmatrix} = -0.8382$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} -0.99 & 0.78 \\ -0.12 & -0.55 \end{vmatrix} = 0.6381$$

$$|c_0| > |c_2| \qquad |0.9657| > |0.6381| \qquad \text{Cumple}$$

Dado que se cumplen todas las condiciones el sistema es estable.

EJEMPLO 4.3

Para el sistema de control discreto de la figura 4.4, determinar el valor o valores de la ganancia K para los cuales el sistema es estable. Asumir como periodo de muestreo T=1 seg y que H(S) es un retenedor de orden cero.

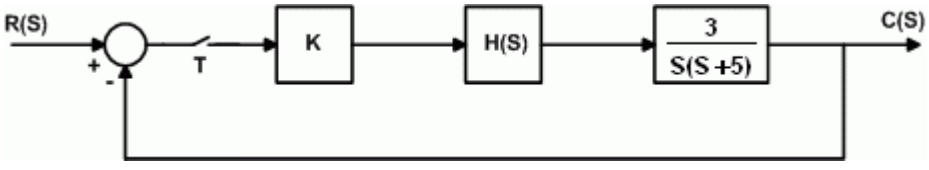


Figura 4.4 Sistema de control para el ejemplo 4.3

SOLUCIÓN: La función de transferencia de pulso para el sistema está dada por la ecuación 3.11

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{3}{S^2(S+5)}\right\}$$

Con un periodo de muestreo $T = 1\ s$ se obtiene:

$$HG(z) = \frac{0.4808(z + 0.2394)}{(z-1)z - 0.00673)}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K.HG(z)}{1 + K.HG(z)}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.4808K(z + 0.2394)}{(z-1)(z - 0.00673) + 0.4808K(z + 0.2394)}$$

La ecuación característica del sistema es:

$$(z-1)(z - 0.00673) + 0.4808K(z + 0.2394) = 0$$

Reorganizando términos:

$$z^3 - (1.00673 - 0.4808K)z + 0.00673 + 0.1151K = 0$$

Aplicando las condiciones de la prueba de Jury se obtiene:

1. $Q(1) = 1 - (1.00673 - 0.4808K) + 0.00673 + 0.1151K > 0$

   $0.5959K > 0 \qquad K > 0$
2. $(-1)^2 Q(-1) = 1 - (1.00673 - 0.4808K)(-1) + 0.00673 + 0.1151K > 0$

   $2.01346 - 0.3657K > 0 \qquad K < 5.5$
3. $|a_0| < |a_n| \qquad |0.00673 + 0.1151K| < 1$

   $8.7446 < K < 8.6296$

Los resultados obtenidos indican que el sistema es estable si: $0 < K < 5.5$

4.2.2 Criterio de estabilidad de Routh para sistemas discretos: Un método muy utilizado en el análisis de estabilidad de sistemas discretos es el uso de la transformación bilineal junto con el criterio de Routh. El método consiste en transformar el plano z en otro plano complejo, el plano W y aplicar, a la ecuación característica resultante, el criterio de estabilidad de Routh.

La transformación bilineal está definida por:

$$z = \frac{1 + \frac{Tw}{2}}{1 - \frac{Tw}{2}} \tag{4.20}$$

$$w = \frac{2}{T}\left[\frac{z-1}{z+1}\right] \tag{4.21}$$

La transformación bilineal permite obtener la ecuación característica en la forma:

$$Q(w) = \alpha_n w^n + \alpha_{n-1} w^{n-1} + \cdots \alpha_1 w + \alpha_0 \tag{4.22}$$

Así, el arreglo de Routh toma la forma:

$$\begin{array}{c|cccc} w^n & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \cdots \\ w^{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \cdots \\ w^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ w^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w^2 & p_1 & p_2 & & \\ w^1 & q_1 & & & \\ w^0 & r_1 & & & \end{array} \tag{4.23}$$

En donde:

$$b_1 = \frac{(\alpha_{n-1})(\alpha_{n-2}) - (\alpha_n)(\alpha_{n-3})}{\alpha_{n-1}} \qquad c_1 = \frac{(b_1)(\alpha_{n-3}) - (b_2)(\alpha_{n-1})}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{(\alpha_{n-1})(\alpha_{n-4}) - (\alpha_n)(\alpha_{n-5})}{\alpha_{n-1}} \qquad c_2 = \frac{(b_1)(\alpha_{n-5}) - (b_3)(\alpha_{n-1})}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{(\alpha_{n-1})(\alpha_{n-6}) - (\alpha_n)(\alpha_{n-7})}{\alpha_{n-1}} \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Una vez terminado el arreglo, el criterio de Routh-Hurwist establece que: “El número de raíces de la ecuación característica con parte real positiva es igual al número de cambios de signo que se presentan en los coeficientes de la primera columna del arreglo”. Es decir, el sistema es estable sí y solo sí todos los coeficientes de la primera columna del arreglo son positivos.

EJEMPLO 4.4

Determinar el valor de K para el cual el sistema de control discreto de la figura 4.5 es estable. $H(S)$ es un retenedor de orden cero. Periodo de muestreo $T = 2\ s$.

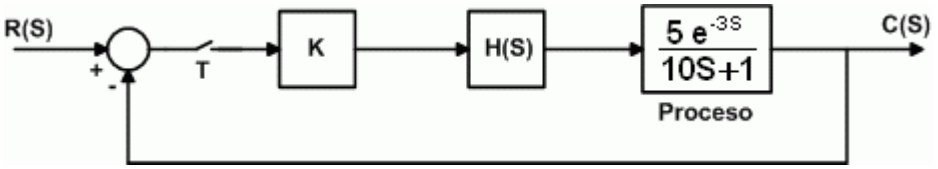


Figura 4.5 Sistema de control para el ejemplo 4.4

SOLUCIÓN: Como la función de transferencia del proceso presenta retardo, es necesario trabajar con la transformada z modificada. Por lo tanto:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad G_p(S) = \frac{5e^{-3S}}{10S+1}$$

Utilizando las ecuaciones 2.31, 2.32 y 2.36 resulta:

$$N = \frac{\theta'}{T} = \frac{3}{2} \qquad N = 1 \qquad \text{(Parte entera)}$$

$$\theta = \theta' - NT = 3 - 2 \qquad \theta = 1$$

$$m = 1 - \frac{\theta}{T} = 1 - \frac{1}{2} \qquad m = 0.5$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-1}\Im_m\left\{\frac{5}{S(10S+1)}\right\} = \frac{5(z-1)}{z^2}\Im_m\left\{\frac{0.1}{S(S+0.1)}\right\}$$

De tablas:

$$\Im_m\left\{\frac{a}{S(S+a)}\right\} = \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$$

$$HG(z) = \frac{5(z-1)}{z^2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{0.9048}{z-0.8187}\right]$$

Simplificando:

$$HG(z) = \frac{0.476(z+0.9044)}{z^2(z-0.8187)}$$

Utilizando la transformación bilineal con $T = 2\ s$, se obtiene:

$$HG(w) = \frac{0.476\left[\frac{1+w}{1-w} + 0.9044\right]}{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2\left[\frac{1+w}{1-w} - 0.8187\right]}$$

$$HG(w) = \frac{0.025(1-w)^2(w+19.9205)}{(1+w)^2(w+0.09968)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado para el sistema es:

$$G_w(w) = \frac{K.HG(w)}{1+K.HG(w)}$$

La ecuación característica es: $1 + K.HG(w) = 0$

$$1 + \frac{0.025(1-w)^2(w+19.9205)}{(1+w)^2(w+0.09968)} = 0$$

Es decir:

$$(1+0.025K)w^3 + (2.0996 + 0.448K)w^2 + (1.1993 - 0.971K)w + 0.0996 + 0.498K = 0$$

El arreglo de Routh para la ecuación anterior es:

$$\begin{array}{c|cc} w^3 & 1+0.025K & 1.1993-0.971K \\ w^2 & 2.0996+0.448K & 0.0996+0.498K \\ w^1 & \dfrac{2.4184-2.006K-0.446K^2}{2.0996+0.448K} & 0 \\ w^0 & 0.0996+0.498K & \end{array}$$

Para que el sistema sea estable, se debe cumplir:

$$1 + 0.025K > 0 \qquad K > -40$$

$$2.0996 + 0.448K > 0 \qquad K > -4.686$$

$$\frac{2.4184 - 2.006K - 0.446K^2}{2.0996 + 0.448K} > 0 \qquad K < 0.998$$

$$0.0996 + 0.498K > 0 \qquad K > -0.2$$

Considerando los resultados anteriores, se deduce que el sistema es estable si:

$$-0.2 < K < 0.998$$

La frecuencia de oscilación para $K = 0.988$ se puede determinar a partir de la fila de w^2 en el arreglo. En esta fila, se reemplaza K y se resuelve la ecuación resultante para w_w, cuyo valor corresponde a la parte imaginaria de w.

Para el caso del ejemplo que se analiza, la ecuación para evaluar a w_w es:

$$[2.0996 + 0.448(0.998)]w_w^2 + 0.498(0.998) = 0$$

$$2.542w_w^2 + 0.462 = 0 \qquad w_w = \pm j0.44$$

Si se desea hallar la frecuencia real W en el plano S se debe utilizar la ecuación:

$$w_w = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{wT}{2}\right) \qquad 4.24$$

Es decir:

$$w = \frac{2}{T}\tan^{-1}\left(\frac{w_w T}{2}\right) \qquad w = \frac{2}{T}\tan^{-1}\left(\frac{0.44 * 2}{2}\right) \qquad w = 0.414\, rad/s$$

4.3 ANÁLISIS DE RESPUESTA TRANSITORIA Y DE ESTADO ESTABLE

En gran número de casos prácticos las características de funcionamiento deseadas para un sistema de control se especifican en términos de parámetros en el dominio del tiempo. Con frecuencia, las características de funcionamiento del sistema se especifican en términos de su respuesta transitoria ante una entrada en escalón unitario, ya que éste tipo de entrada es fácil de generar y resulta muy adecuada para obtener información útil, tanto de las características de respuesta transitoria como de respuesta de estado estable del sistema.

4.3.1 Especificaciones de respuesta transitoria: Así como los sistemas continuos, la respuesta transitoria de un sistema en tiempo discreto se caracteriza por el tiempo de pico, el tiempo de crecimiento, el tiempo de establecimiento y el máximo sobreimpulso. Las especificaciones de respuesta anteriores, se relacionan directamente con el factor ó coeficiente de amortiguamiento y con la frecuencia natural del sistema.

La figura 4.6 muestra las especificaciones de respuesta transitoria, de un sistema de segundo orden subamortiguado, ante una entrada en escalón unitario.

A continuación se definen las especificaciones de la respuesta transitoria ante una entrada en escalón unitario [4.6]:

Tiempo de retardo (t_d): Es el tiempo necesario para que la respuesta del sistema alcance por primera vez, el 50% de su valor final.

Para un sistema de segundo orden, el tiempo de retardo está dado por:

$$t_d = \frac{1 + 0.7\xi}{w_n} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.25$$

$$t_d = \frac{1.1 + 0.125\xi + 0.46\xi^2}{w_n} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.25a$$

La ecuación 4.25a da una mejor aproximación para el tiempo de retardo.

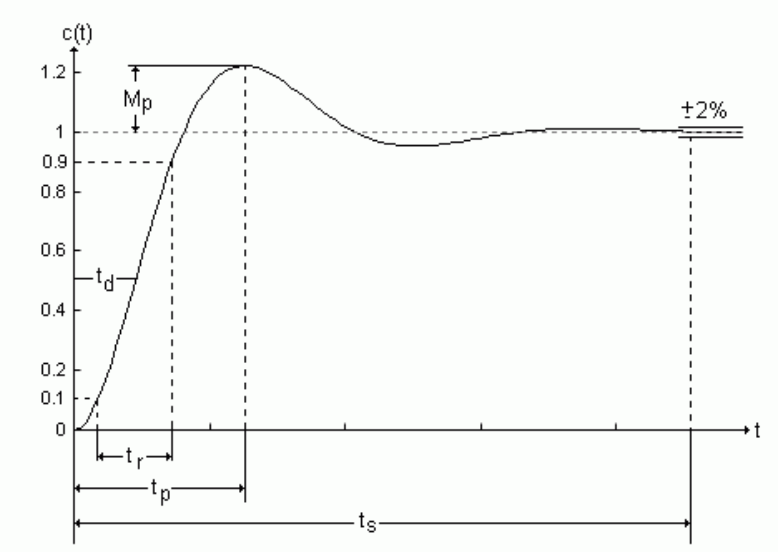


Figura 4.6 Respuesta al escalón unitario y especificaciones de respuesta transitoria

Tiempo de crecimiento (t_r): Es el tiempo que requiere la respuesta al escalón para pasar del 10% al 90% de su valor final.

Para sistemas de segundo orden, el tiempo de crecimiento está dado por:

$$t_r = \frac{0.8 + 2.5\xi}{w_n} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.26$$

$$t_r = \frac{1 - 0.4167\xi + 2.9\xi^2}{w_n} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.26a$$

La ecuación 4.26a da una mejor aproximación para el tiempo de crecimiento.

Tiempo de pico (t_p): Es el tiempo necesario para que la respuesta al escalón alcance su máximo sobreimpulso.

Para un sistema de segundo orden subamortiguado, el tiempo de pico se calcula mediante la ecuación:

$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.27$$

Máximo sobreimpulso (M_p): Es el valor máximo de la curva de respuesta al escalón medido partir del valor de estado estable.

$$Maximo\ sobreimpulso = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} * 100\% \qquad 4.28$$

En donde $c(t_p)$ representa el valor máximo alcanzado por la respuesta y $c(\infty)$ representa el valor de estado estable de la misma. En términos de ξ y w_n el valor del máximo sobreimpulso está dado por:

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.29$$

Y, en forma porcentual:

$$M_p\% = 100e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.30$$

Tiempo de establecimiento (t_s): Es el tiempo requerido para que la curva de respuesta al escalón alcance y se quede variando, alrededor de su valor final dentro de un rango especificado en función de un porcentaje absoluto de su valor final. Este valor es por lo general el 5% ó el 2%.

Para establecimiento al 5%:

$$t_s = \frac{3}{\xi w_n} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.31$$

Para establecimiento al 2%:

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} \qquad 0 < \xi < 1 \qquad 4.32$$

Para sistemas con $\xi \geq 1$, el tiempo de establecimiento está dado por:

$$t_s = \frac{8\xi}{w_n} \qquad \xi \geq 1 \qquad 4.33$$

4.3.2 Análisis de error en estado permanente en sistemas discretos: Teniendo en cuenta que las señales de entrada y salida de un sistema de control en tiempo discreto son funciones en tiempo continuo, como se muestra en el diagrama de bloques la figura 4.7, la señal de error actuante $e(t)$, está dada por:

$$e(t) = r(t) - c(t) \tag{4.34}$$

En donde $r(t)$ es la señal de entrada y $c(t)$ es la señal de salida.

Si se toma la transformada z a la ecuación 4.34 se obtiene:

$$E(z) = R(z) - C(z) \tag{4.35}$$

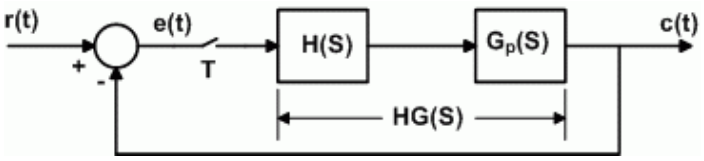


Figura 4.7 Diagrama en bloques de un sistema de control en tiempo discreto

La función de transferencia de pulso de lazo cerrado para el sistema de la figura 4.7 es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{HG(z)}{1 + HG(z)} \tag{4.36}$$

Al despejar $C(z)$ de la ecuación 4.36 y llevar el resultado a la ecuación 4.35 se obtiene:

$$E(z) = R(z) - \frac{HG(z).R(z)}{1 + HG(z)}$$

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + HG(z)} \tag{4.37}$$

El error actuante en estado estable se puede evaluar aplicando el teorema del valor final:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z \to 1}(z-1)E(z) = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1 + HG(z)} \tag{4.38}$$

A continuación se deducen las ecuaciones para calcular el error de estado estable de un sistema en tiempo discreto ante entradas de prueba típicas: la entrada en escalón, la entrada en rampa y la entrada en parábola.

Entrada escalón: Para una entrada en escalón $r(t) = A$ se tiene:

$$R(z) = \frac{Az}{z-1}$$

Entonces:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{Az}{(z-1)(1+HG(z)}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{A}{1+HG(z)}\right]$$

Si se define la **Constante de error de posición estática** como:

$$k_p = \lim_{z\to 1} HG(z) = \lim_{z\to 1}(FTPLA) \qquad 4.39$$

En donde $FTPLA$ es la función de transferencia de lazo abierto, el error actuante en estado permanente ante una entrada en escalón es:

$$e_{ss} = \frac{A}{1+k_p} \qquad 4.40$$

Entrada rampa: Para una entrada rampa $r(t) = At$ se tiene:

$$R(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2}$$

Entonces:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{ATz}{(z-1)^2[1+HG(z)]}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{AT}{(z-1)HG(z)}\right]$$

Si se define la **Constante de error de velocidad estática** como:

$$k_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\,HG(z) = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\,.\,FTPLA \qquad 4.41$$

El error actuante en estado permanente ante una entrada en rampa es:

$$e_{ss}(kT) = \frac{A}{k_v} \qquad 4.43$$

Entrada parábola: Para una entrada de aceleración o parábola $r(t) = At^2/2$, se tiene:

$$R(z) = \frac{AT^2(z+1)}{2(z-1)^3}$$

Entonces:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{AT^2z(z+1)}{2(z-1)^3[1+HG(z)]}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{AT^2}{(z-1)^2[HG(z)]}\right]$$

Si se define la **Constante de error de aceleración estática** como:

$$k_a = \frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}[(z-1)^2HG(z)] = \frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}[(z-1)^2.FTPLA] \qquad 4.43$$

El error actuante en estado permanente ante una entrada de aceleración es:

$$e_{ss}(kT) = \frac{A}{k_a} \qquad 4.44$$

NOTA: La función de transferencia de pulso del sistema en lazo abierto $HG(z)$ se puede escribir en la forma:

$$HG(z) = \frac{k\prod(z - z_i)}{(z-1)^N \prod(z - p_i)} \qquad 4.45$$

El valor de N indica el tipo del sistema y representa el número de integradores. Así, si $N = 0$ el sistema es tipo cero, si $N = 1$ el sistema es tipo 1, para $N = 2$ el sistema es tipo 2, etc.

El error de estado estable ante diferentes entradas se resume en la tabla 4.3

Tabla 4.3 Error de estado estable de acuerdo al tipo de sistema

Tipo	***Escalón***	***Rampa***	***Parábola***
0	$\frac{A}{1+k_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{A}{k_v}$	∞
2	0	0	$\frac{A}{k_a}$

EJEMPLO 4.5

Considerando el sistema de control de lazo cerrado que se muestra en la figura 4.8. a) Calcular y dibujar la respuesta del sistema ante una entrada en escalón unitario con $D(z) = 1$ y $T = 0.5\,s$. b) Calcular y dibujar sobre la misma gráfica, la respuesta del sistema continúo al escalón unitario (es decir, removiendo el muestreador, el controlador digital y el retenedor). c) Calcular el error de estado estable del sistema discreto ante entradas escalón, rampa y parábola unitarias.

$$G_p(S) = \frac{0.5}{S + 0.5}$$

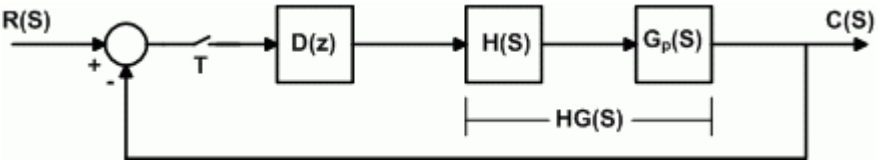


Figura 4.8 Sistema de control para los ejemplos 4.5 y 4.6

SOLUCIÓN: a) La función de transferencia de pulso para la planta es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{0.5}{S(S + 0.5)}\right\} = \frac{0.2212}{z - 0.7788}$$

La función de transferencia de pulso de lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} = \frac{0.2212}{z - 0.5576}$$

Si la entrada es un escalón unitario:

$$R(z) = \frac{z}{z - 1} \qquad \text{y} \qquad C(z) = G_w(z).R(z)$$

Es decir:

$$C(z) = \frac{0.2212z}{(z - 1)(z - 0.5576)}$$

Si se expande $C(z)/z$ en fracciones parciales se obtiene al despejar $C(z)$:

$$C(z) = \frac{0.5z}{z - 1} - \frac{0.5z}{z - 0.5576}$$

De tablas se obtiene:

$$c(kT) = 0.5 - 0.5(0.5576)^k$$

b) La función de transferencia de lazo cerrado para el sistema continuo es:

$$G_w(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1 + G(S)} = \frac{0.5}{S + 1}$$

Si la entrada es un escalón unitario $R(S) = 1/S$ y $C(S) = G_w(S).R(S)$ es decir:

$$C(S) = G_w(S)R(S) = \frac{0.5}{S(S + 1)} = \frac{0.5}{S} - \frac{0.5}{S + 1}$$

Al evaluar la transformada inversa de Laplace resulta:

$$c(t) = 0.5 - 0.5e^{-t}$$

En la tabla 4.4 se dan las respuestas del sistema discreto y del sistema continuo para diferentes valores de t y su correspondiente instante de muestreo kT
En la figura 4.9 se muestra la respuesta del sistema discreto y del sistema continuo al escalón unitario (ver programa en MATLAB al final del ejemplo).

Tabla 4.4 Valores de la respuesta $c(t)$ y $c(KT)$

t	0	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0	10.0
kT	0	1	2	4	6	8	12	20
C(t)	0	0.1967	0.3160	0.4323	0.4751	0.4908	0.4987	0.4999
c(kT)	0	0.2211	0.3445	0.4516	0.4849	0.4953	0.4995	0.4999

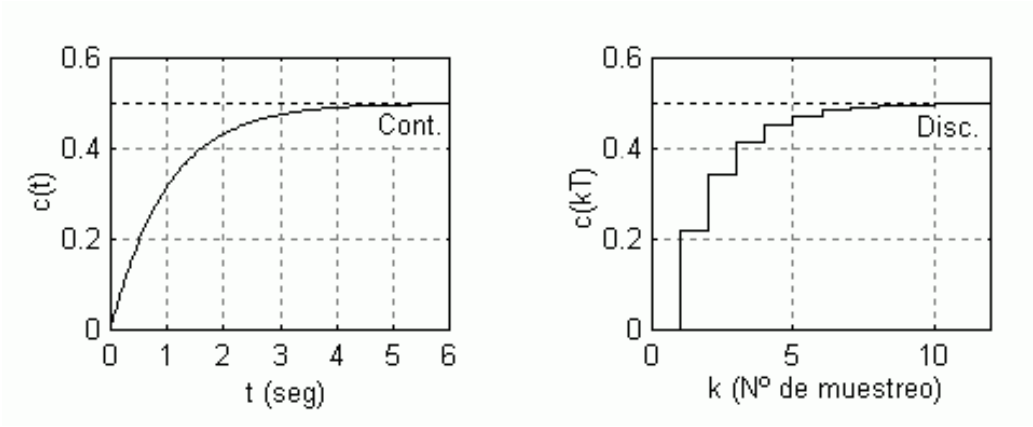


Figura 4.9 Respuesta del sistema del ejemplo 4.5 al escalón unitario

c) El error actuante de estado estable ante una entrada en escalón es:

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + k_p} \qquad k_p = \lim_{z \to 1}(FTPLA)$$

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + k_p} \qquad k_p = \lim_{z \to 1} FTPLA$$

$$k_p = \lim_{z \to 1}\left[\frac{0.2212}{z - 0.7788}\right] = 1$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + 1} \qquad e_{ss} = 0.5$$

El error actuante de estado estable para una entrada rampa es:

$$e_{ss} = \frac{A}{k_v} \qquad k_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\,FTPLA$$

$$k_v = \frac{1}{0.5}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{0.2212}{z-0.7788}\right] = 0 \qquad e_{ss} = \infty$$

El error actuante de estado estable para una entrada parábola es:

$$e_{ss} = \frac{A}{k_a} \qquad k_a = \frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}(z-1)^2\,FTPLA$$

$$k_a = \frac{1}{0.25}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{0.2212}{z-0.7788}\right] = 0 \qquad e_{ss} = \infty$$

A continuación se lista el programa en MATLAB que permite discretizar el sistema y graficar sus respuestas, continua y discreta, ante una entrada en escalón unitario.

```
% Programa para resolver el ejemplo 4.5
clc
n=0.5;
d=[1 0.5];
[nd,dd]=c2dm(n,d,0.5,'zoh');          % Discretización del sistema.
printsys(nd,dd,'z')
[nwc,dwc]=cloop(n,d,-1);              % Lazo cerrado sist. continuo.
[nwd,dwd]=cloop(nd,dd,-1);            % Lazo cerrado sist. discreto.
printsys(nwd,dwd,'z')
subplot(2,2,1)
step(nwc,dwc)                         % Respuesta sist. continuo.
axis([0 6 0 0.6])
grid
subplot(2,2,2)
dstep(nwd,dwd);                       % Respuesta sist. discreto.
axis([0 12 0 0.6])
grid
```

```
pause
t=0:0.5:12;
u=ones(1,25);
y1=lsim(nwc,dwc,u,t);                % Valores de la respuesta cont.
y2=dlsim(nwd,dwd,u);                 %  Valores de la respuesta disc.
datos=[t' y1 y2]
```

EJEMPLO 4.6

Para el sistema de control discreto de lazo cerrado mostrado en la figura 4.8 hallar: a) La constante de tiempo para $T = 0.5\ s$ b) El tiempo requerido para que la respuesta del sistema, a una entrada en escalón, alcance el 98% de su valor final. c) Repita las partes a y b para $T = 1\ s$ d) Repita las partes a y b para el sistema continuo, es decir, si se remueven el retenedor, y el controlador digital.

SOLUCIÓN: de acuerdo con la ecuación 4.15, la ubicación de un polo en el plano z está dada por:

$$|z| = e^{-\xi w_n T}$$

$$\theta = 57.3 w_n T\sqrt{1-\xi^2}$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\xi w_n = -\frac{\ln|z|}{T}$$

La constante de tiempo equivalente τ de un polo en el plano z se define como:

$$\tau = \frac{1}{\xi w_n} = -\frac{T}{\ln|z|}$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el ejemplo 4.5, el sistema en lazo cerrado tiene un polo en $z = 0.5576$, entonces:

$$\tau = -\frac{0.5}{\ln|0.5576|} \qquad \tau = 0.856\ s.$$

b) El sistema alcanza el 98% del valor final de la respuesta al escalón cuando el tiempo transcurrido es $t = 4\tau$, en este caso $t = 3.42\ s$.

c) Para T= $1\ s$, la función de transferencia de pulso de la planta es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left[\frac{0.5}{S(S+0.5)}\right] = \frac{0.3934}{z - 0.6065}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.3934}{z - 0.2130}$$

Entonces:

$$\tau = -\frac{1}{\ln|0.2130|} \qquad \tau = 0.646\ s.$$

El tiempo para alcanzar el 98% de la respuesta al escalón es $t = 4\tau = 2.584\ s$.

d) La función de transferencia de lazo cerrado para el sistema continuo es:

$$G_w(S) = \frac{G(S)}{1 + G(S)} \qquad G_w(S) = \frac{0.5}{S + 1}$$

Así $\tau = 1\ s$ por lo tanto, el tiempo para alcanzar el 98% del valor final de la respuesta es $t = 4\tau$, es decir: $t = 4s$.

Considerando la planta discreta en lazo abierto se tiene:

Para $\mathrm{T} = 0.5\ s$ $\quad \tau = -\frac{0.5}{\ln|0.7788|} \quad \tau = 2\ s.$

Para $T = 1\ s$ $\quad \tau = -\frac{1}{\ln|0.6065|} \quad \tau = 2\ s.$

Para el sistema continuo: $\quad G(S) = \frac{0.5}{S + 0.5} \quad \tau = 2\ s.$

Como puede verse, la constante de tiempo de la planta en lazo abierto es la misma en todos los casos.

4.3.3 Raíces dominantes: Como se ha visto, la ubicación de las raíces de la ecuación característica en el plano z incide directamente en la respuesta transitoria de los sistemas discretos. En general, algunas de las raíces, dada su ubicación en el plano z, afectan más la respuesta transitoria del sistema que otras. Estas raíces son llamadas “Raíces dominantes”

En el plano S, las raíces más cercanas al eje imaginario en el semiplano izquierdo son las raíces dominantes, pues generan respuestas que decaen lentamente en el tiempo. Las raíces que están más alejadas del eje imaginario corresponden a raíces no dominantes y generan respuestas que decaen rápidamente en el tiempo. En el plano z las raíces dominantes están dentro del círculo unitario y más cercanas a éste. Las raíces cercanas al origen del plano z son raíces no dominantes.

Para el diseño se recomienda seleccionar las raíces dominantes con coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.707$. La ubicación de raíces dominantes dentro de la región izquierda del círculo unitario debe evitarse en lo posible pues la respuesta temporal correspondiente a dichas raíces es oscilatoria y con alternancia de signo.

La figura 4.10 muestra las regiones en las que se recomienda ubicar las raíces dominantes y las no dominantes para el diseño de sistemas continuos y de sistemas discretos.

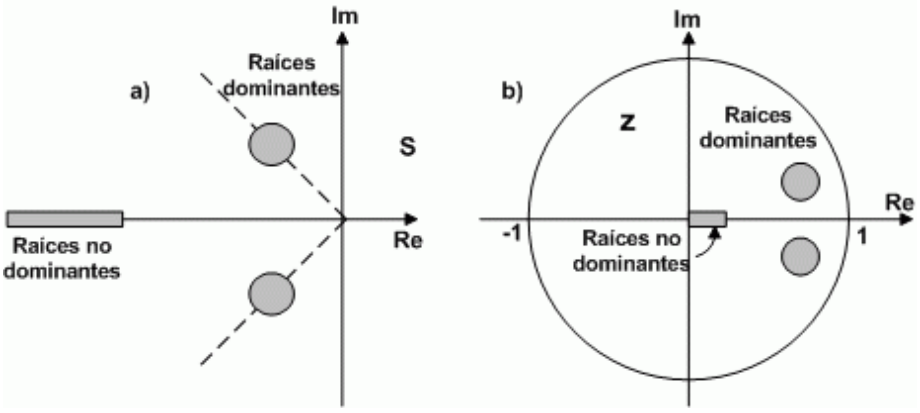


Figura 4.10 Ubicación de raíces dominantes: a) En el plano S b) En el plano z

4.4 EL MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

El método del lugar geométrico de las raíces permite encontrar los polos de la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de control a partir de la función de transferencia de lazo abierto del sistema.

La aplicación del método del lugar geométrico de las raíces en el diseño de sistemas de control es muy útil, ya que indica la forma en que se debe modificar la posición de los ceros y de los polos de lazo abierto para que la respuesta de lazo cerrado cumpla con las especificaciones de comportamiento establecidas para el sistema. (Coeficiente de amortiguamiento, frecuencia natural no amortiguada, máximo sobreimpulso etc.).

El método del lugar geométrico de las raíces desarrollado para los sistemas continuos, se puede extender al diseño de sistemas discretos sin modificaciones fundamentales, excepto que en el análisis de estabilidad se cambia del eje imaginario en el plano S al círculo unitario en el plano z.

4.4.1 Condición de ángulo y condición de módulo: Para un sistema de control discreto invariante en el tiempo, como el que se muestra en la figura 4.11, la ecuación característica puede tomar una de las siguientes formas:

$$1 + G(z) = 0$$
$$1 + GH(z) = 0 \qquad 4.47$$

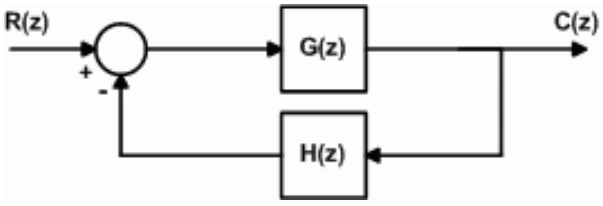


Figura 4.11 Sistema de control discreto en lazo cerrado

Para generalizar, se asume que la ecuación característica es:

$$1 + F(z) = 0 \qquad 4.48$$

En donde $F(z) = G(z)$ ó $F(z) = GH(z)$. Siendo, por lo tanto $F(z)$ la función de transferencia de lazo abierto del sistema.

La ecuación característica dada por 4.48 se puede escribir en la forma:

$$F(z) = -1 \qquad 4.49$$

Dado que $F(z)$ es una cantidad compleja, la ecuación 4.49 debe cumplir dos condiciones a saber:

Condición de ángulo: se utiliza para determinar las trayectorias del lugar geométrico en el plano z.

$$\measuredangle F(z) = \theta = \pm 180(2q+1) \qquad q = 0, 1, 2, \cdots \tag{4.50}$$

Condición de módulo: permite calcular la ganancia asociada a los polos de lazo cerrado especificados.

$$|F(z)| = 1 \tag{4.51}$$

Los valores de z que cumplen simultáneamente las dos condiciones anteriores, son las raíces de la ecuación característica, es decir, son los polos de lazo cerrado del sistema.

4.4.2 Reglas para construir el lugar de las raíces en sistemas discretos: Para trazar el lugar de las raíces de un sistema discreto se obtiene primero la ecuación característica o sea: $1 + F(z) = 0$ y se reescribe esta ecuación de modo que el parámetro de interés (la ganancia K por lo general), aparezca como un factor de multiplicación en la forma:

$$1 + \frac{K(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_m)}{(z+p_1)(z+p_2)\cdots(z+p_n)} \tag{4.52}$$

A continuación se ubican los polos y ceros de $F(z)$ en el plano z y se procede a la aplicación de las siguientes reglas que permiten, de manera relativamente fácil, construir el lugar de las raíces de un sistema discreto.

Regla 1: El lugar geométrico de las raíces comienza en los polos de $F(z)$ para $K = 0$ y termina en los ceros de $F(z)$ para $K = \infty$.

Regla 2: El número de ramas del lugar geométrico de las raíces es igual al mayor entre P y Z siendo P el número de polos y Z el número de ceros de $F(z)$.

Regla 3: El lugar geométrico de las raíces es simétrico con respecto al eje real del plano z.

Regla 4: El número de asíntotas que presenta el lugar geométrico de las raíces de una ecuación es $N = P - Z$. Las asíntotas convergen en un punto localizado sobre el eje real, este punto se denomina “centro de gravedad” y su localización está dada por:

$$C.G = \frac{\sum coord.\,de\ polos - \sum coord.\,de\ ceros}{P - Z} \qquad 4.53$$

Regla 5: El ángulo que cada asíntota forma con el eje real, está dado por:

$$\varphi_q = \frac{180(2q+1)}{P - Z} \qquad 4.54$$

Regla 6: El lugar geométrico de las raíces sobre el eje real, sólo existe a la izquierda de un número impar de raíces ubicadas sobre dicho eje.

Regla 7: Cuando se presentan raíces complejas conjugadas, es necesario calcular el ángulo de partida del polo ó el ángulo de llegada al cero. Así

- **Angulo de partida del polo** (ver figura 4.12)

$$\emptyset = 180^o - \sum \measuredangle de\ los\ otros\ polos + \sum \measuredangle\ de\ los\ ceros \qquad 4.55$$

- **Angulo de llegada al cero** (ver figura 4.13)

$$\beta = 180^o + \sum \measuredangle de\ los\ polos - \sum \measuredangle de\ los\ otros\ ceros \qquad 4.56$$

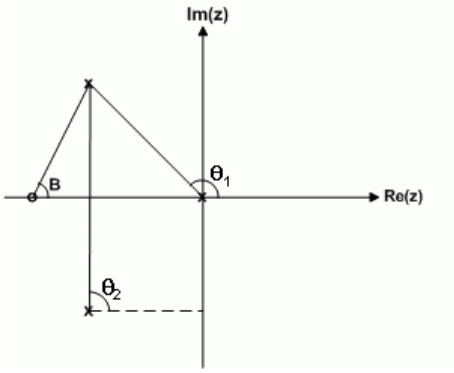


Figura 4.12 Cálculo del ángulo de partida del polo.

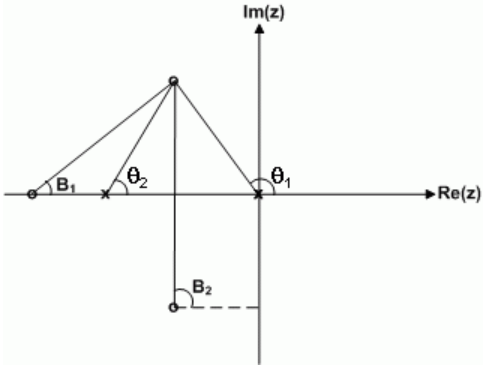


Figura 4.13 Cálculo del ángulo de llegada al cero

Regla 8: Si existen dos polos adyacentes sobre el eje real, el lugar geométrico de las raíces abandona el eje, si existen dos ceros adyacentes sobre el eje real, el lugar geométrico de las raíces converge en el eje. El punto en el cual el lugar geométrico de las raíces abandona o converge en el eje real se denomina "punto de ruptura" o "punto de silla" y su ubicación se puede determinar resolviendo la ecuación:

$$\frac{dK}{dz} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{dGH(z)}{dz} = 0 \tag{4.57}$$

Regla 9: Los puntos en los cuales el lugar geométrico de las raíces corta al eje imaginario se determinan haciendo $z = jv$ en la ecuación característica, igualando la parte real y la parte imaginaria a cero y resolviendo las ecuaciones resultantes para v y K. Los valores obtenidos, dan la localización del punto de corte con el eje imaginario y la ganancia K en dicho punto.

Regla 10: El valor de la ganancia K en cualquier punto z_o ubicado sobre el lugar geométrico de las raíces se obtiene al resolver la ecuación:

$$|KGH(z_0)| = 1$$

EJEMPLO 4.7

Para el sistema de control discreto mostrado en la figura 4.14, trazar el lugar geométrico de las raíces para tiempos de muestreo $T = 1\,s$, $T = 2\,s$ y $T = 3\,s$. A partir de los resultados obtenidos, que se puede concluir con respecto a la ganancia crítica y al tiempo de muestreo?

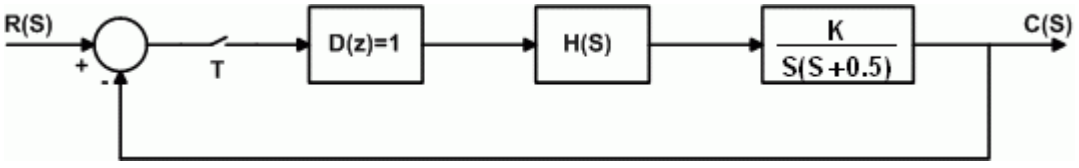


Figura 4.14 Sistema de control para el ejemplo 4.7

SOLUCIÓN: Primero que todo se debe obtener la función de transferencia de pulso del sistema.

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{K}{S^2(S + 0.5)}\right\}$$

Para $T = 1\ s$.

$$HG(z) = \frac{0.4261K(z + 0.8467)}{(z - 1)(z - 0.6065)}$$

La ecuación característica del sistema es: $1 + HG(z) = 0$ es decir:

$$1 + F(z) = 1 + \frac{0.4261K(z + 0.8467)}{(z - 1)(z - 0.6065)} = 0$$

Regla 1: Polos de $F(z)$: $P = 2$ ubicados en $z = 1$ y $z = 0.6065$

Ceros de $F(z)$ $Z = 1$ ubicado en $z = -0.8467$

Regla 2: El número de ramas del lugar es igual al mayor entre P y Z. Ramas=2

Regla 3: El lugar geométrico de las raíces es simétrico respecto al eje real.

Regla 4: El número de asíntotas es $N = P - Z$ $N = 1$

$$C.G = \frac{\sum coord.\ de\ polos - \sum coord.\ de\ ceros}{P - Z}$$

$$C.G = \frac{(1 + 0.6065) - (-0.8467)}{2 - 1} \qquad C.G = 2.45$$

Regla 5: Angulo de las asíntotas con el eje real

$$\varphi_q = \frac{180^o(2q + 1)}{P - Z} \qquad \varphi_o = \frac{180^o}{2 - 1} \qquad \varphi_o = 180^o$$

Regla 6: El lugar geométrico de las raíces solo existe a la izquierda de un número impar de raíces ubicadas sobre dicho eje (ver figura 4.15)

Regla 7: No se aplica pues no existen polos ni ceros complejos conjugados

Regla 8: Existen polos adyacentes sobre el eje real, el lugar geométrico de las raíces abandona el eje real en el punto que cumple la condición:

$$\frac{dK}{dz} = 0$$

De la ecuación característica:

$$K = -\frac{(z - 1)(z - 0.6065)}{0.4261(z + 0.8467)}$$

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{1}{0.4261} * \frac{z^2 + 1.6934z - 1.9667}{(z + 0.8467)^2} = 0$$

Es decir: $z^2 + 1.6934z - 1.9667 = 0$

Resolviendo para z se obtiene: $z = 0.791$ y $z = -2.48$. Como los polos adyacentes son $z = 1$ y $z = 0.6065$, el lugar abandona el eje en $z = 0.791$ que corresponde aun punto localizado entre los polos adyacentes. (El punto $z = -2.48$ puede considerarse como punto de convergencia en el eje real).

Regla 9: Para determinar los puntos en los cuales el lugar geométrico de las raíces corta al eje imaginario, se hace $z = jv$ en la ecuación característica se igualan a cero la parte real y la parte imaginaria y se resuelven las ecuaciones resultantes para v y K

$$1 + \frac{0.4261K(z + 0.8467)}{(z - 1)(z - 0.6065)} = 0 \qquad \text{con} \qquad z = jv$$

$$(jv - 1)(jv - 0.6065) + 0.4261K(jv + 0.8467) = 0$$

Igualando parte real y parte imaginaria a cero se obtiene:

$$0.360K + 0.6065 - v^2 = 0$$

$$0.4261Kv - 1.6065v = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene: $K = 3.77 \quad v = \pm 1.4$.

Es decir, el lugar geométrico de las raíces corta al eje imaginario en $z = \pm j1.4$ cuando $K = 3.77$

La figura 4.15a muestra el lugar geométrico de las raíces del sistema para $T = 1\ s$. La parte punteada corresponde al círculo unitario y se da como referencia para obtener el valor de la ganancia crítica.

El valor de la ganancia crítica se obtiene haciendo $|KHG(z)| = 1$. De la figura 4.15a se deduce que $|KHG(z)| = 1$ para $z = 0.54 \pm j0.86$, entonces:

$$\left| \frac{0.4261K(0.54 + j0.86 + 0.8467)}{(0.54 + j0.86 - 1)(0.54 + j0.86 - 0.6065)} \right| = 1$$

$$\left|\frac{0.4261K(1.3867+j0.86)}{(j0.86-0.46)(j0.86-0.66)}\right|=1 \qquad 0.8265K=1$$

Por lo tanto, la ganancia crítica es $K=1.21$

b) Para $T=2\,s$

$$HG(z)=\frac{1.4715K(z+0.7182)}{(z-1)(z-0.3678)}$$

La ecuación característica $1+HG(z)=0$ es:

$$1+F(z)=1+\frac{1.4715K(z+0.7182)}{(z-1)(z-0.3678)}=0$$

Regla 1: Polos de $F(z)$: $P=2$ en $z=1$ y $z=0.3678$

Ceros de $F(z)$: $Z=1$ en $z=-0.7182$

Regla 2: Número de ramas del lugar, el mayor entre P y Z. Ramas=2.

Regla 3: El lugar geométrico de las raíces es simétrico respecto al eje real.

Regla 4: El número de asíntotas es $N=P-Z \qquad N=1$

Regla 5: Angulo de las asíntotas con el eje real:

$$\varphi_o=\frac{180^o}{2-1} \qquad \varphi_o=180^o$$

Regla 6: El lugar geométrico de las raíces sobre el eje real solo existe a la izquierda de un número impar de raíces ubicadas sobre dicho eje.

Regla 7: No se aplica pues no existen polos ni ceros complejos.

Regla 8: Existen polos adyacentes sobre el eje real, el lugar geométrico de las raíces abandona el eje en el punto que cumple con la ecuación:

$$\frac{dK}{dz}=0$$

De la ecuación característica:

$$K=-\frac{(z-1)(z-0.3678)}{1.4715(z+0.7182)} \qquad \frac{dK}{dz}=-\frac{1}{1.4715}*\frac{z^2+1.4364z-1.3501}{(z+0.7182)^2}=0$$

Es decir:

$$z^2+1.4354z-1.3501=0$$

Resolviendo se obtiene: $z = 0.64$ y $z = -2.08$

Por lo tanto, el lugar geométrico de las raíces abandona el eje real en $z = 0.64$ (punto entre los polos adyacentes). El punto $z = -2.08$ puede considerarse como punto de convergencia en el eje real.

Regla 9: Para determinar las intersecciones del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario, se hace $z = jv$ en la ecuación característica, es decir:

$$1 + \frac{1.4715K(jv + 0.7182)}{(jv - 1)(jv - 0.3678)} = 0$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$0.3678 + 1.0568K - v^2 = 0$$

$$1.4715Kv - 1.3678v = 0$$

Al resolver las ecuaciones anteriores se obtiene: $K = 0.929 \quad v = \pm 1.16$.

Es decir, el lugar geométrico de las raíces corta al eje imaginario en $z = \pm j1.16$ cuando $K = 0.929$.

La figura 4.15b muestra el lugar geométrico de las raíces para T= $2\ s$.

El valor de la ganancia crítica se obtiene haciendo $|KHG(z)| = 1$. De la figura 4.15b se deduce que $|KHG(z)| = 1$ para $z = 0.28 \pm j0.96$, entonces:

$$\left|\frac{1.4715K(j0.96 + 0.9982)}{(j0.96 - 0.72)(j0.96 - 0.087)}\right| = 1 \qquad 1.7617K = 1$$

Por lo tanto, la ganancia crítica es $K = 0.567$

c) Para $T = 5\ s$

$$HG(z) = \frac{6.383K(z + 0.4504)}{(z - 1)(z - 0.0821)}$$

Para este caso se utiliza un procedimiento semejante al desarrollado en los literales a) y b).

La figura 4.15c muestra el lugar geométrico de las raíces del sistema con $T = 5\ s$. El lugar abandona el eje real en $z = 0.423$ y converge en el eje real en $z = -1.32$.

El punto de corte con el eje imaginario está en $z = \pm j0.756$ y la ganancia crítica es $K = 0.323$.

Al analizar los valores de la ganancia crítica del sistema, para diferentes valores del periodo de muestreo, se concluye que “al aumentar el periodo de muestreo disminuye el valor de la ganancia crítica”.

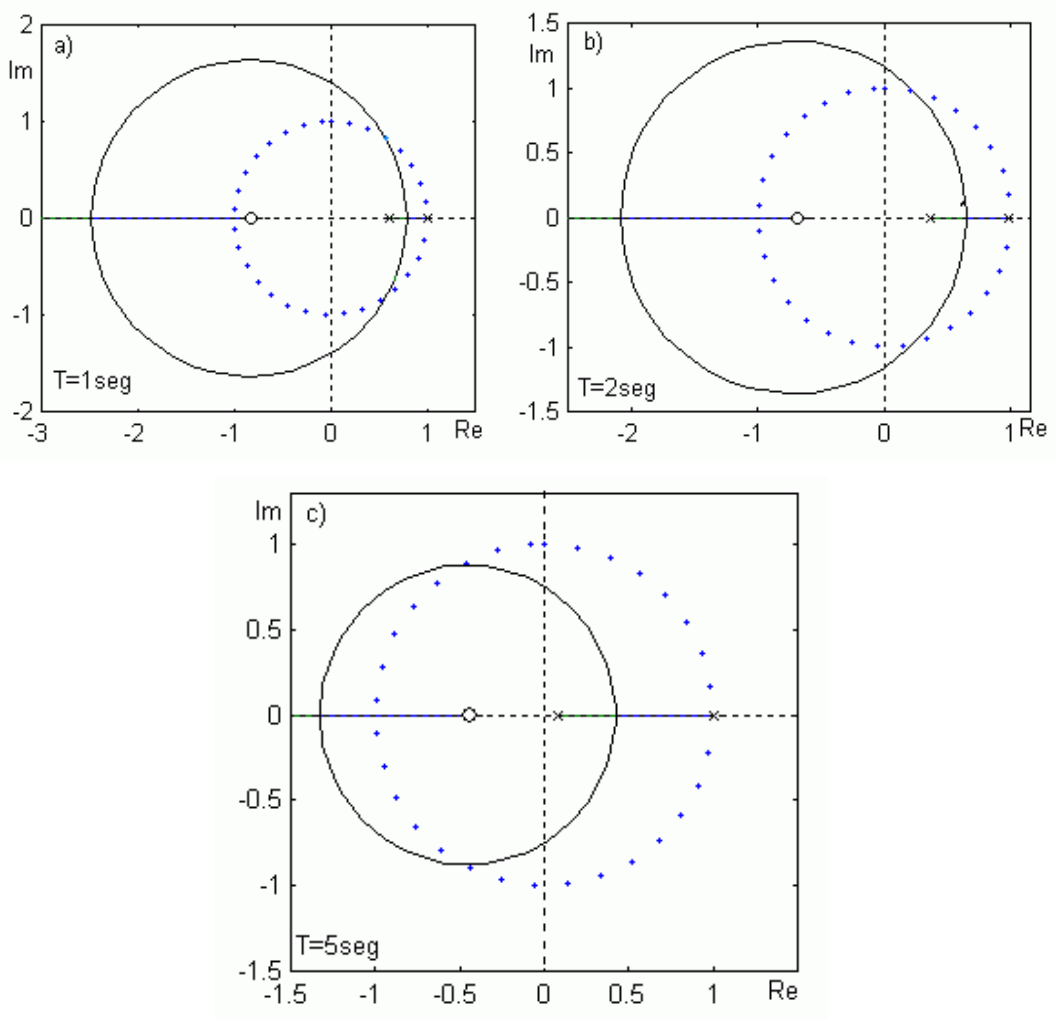


Figura 4.15 Diagramas del L.G.R. para el ejemplo 4.7

A continuación se da un programa en Matlab® que permite obtener el lugar geométrico de las raíces para el ejemplo 4.7

```
% Programa para obtener el LGR del ejemplo 4.7
clc
n=[1];
```

```
d=[1 0.5 0];                    %Planta continua
[nd,dd]=c2dm(n,d,1,'zoh');      %Discretización con T=1 seg
[nd1,dd1]=c2dm(n,d,2,'zoh');    %Discretización con T=2 seg
[nd2,dd2]=c2dm(n,d,5,'zoh');    %Discretización con T=5 seg
x=0:0.2:2*pi;
figure(1)
plot(sin(x),cos(x),'.')         %Dibuja el circulo unitario
hold
rlocus(nd,dd)                   %Grafica del lugar geométrico de las raíces
axis([-3 1.5 -2 2])             %Escala para los ejes
pause
figure(2)
plot(sin(x),cos(x),'.')
hold
rlocus(nd1,dd1)
axis([-2.5 1.5 -1.5 1.5])
pause
figure(3)
plot(sin(x),cos(x),'.')
hold
rlocus(nd2,dd2)
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
```

EJEMPLO 4.8

Suponiendo que en el sistema de control discreto de la figura 4.16 la función de transferencia de pulso en lazo abierto $HG(z)$ está dada por:

$$HG(z) = \frac{0.5K(z+0.5)}{z(z-0.8)(z^2-0.8z+0.41)}$$

Trazar el lugar geométrico de las raíces al variar K desde 0 hasta ∞.

SOLUCIÓN: Al aplicar las reglas para la construcción del L.G.R se tiene:

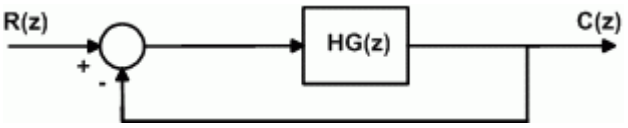


Figura 4.16 Sistema de control discreto para el ejemplo 4.8

Regla 1: Número de ceros $Z = 1$ en $z = -0.5$

Número de polos $P = 4$ en $z = 0,\ z = 0.8,\ z = 0.4 \pm j0.5$

Regla 2: Número de ramas del lugar 4

Regla 3: El lugar geométrico de las raíces es simétrico con respecto al eje real.

Regla 4: Número de asíntotas 3

$$C.G = \frac{(0 + 0.8 + 0.4 + j0.5 + 0.4 - j0.5) - (-0.5)}{3} \qquad C.G = 0.7$$

Regla 5: Ángulo de las asíntotas

$$\varphi_o = \frac{180^o}{3} = 60^o \qquad \varphi_1 = \frac{180^o * 3}{3} = 180^o \qquad \varphi_2 = \frac{180^o * 5}{3} = 300^o$$

Regla 6: El lugar geométrico de las raíces sobre el eje real sólo existe a la izquierda de un número impar de raíces ubicadas sobre dicho eje.

Regla 7: Existen polos complejos conjugados, por lo tanto, se debe calcular el ángulo de partida del polo (ver figura 4.17 para el cálculo).

Según la ecuación 4.55:

$$\emptyset = 180^o - \sum \measuredangle de\ los\ otros\ polos + \sum \measuredangle\ de\ los\ ceros$$

$$\phi = 180^o - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + B$$

$$\theta_1 = 180^o - \tan^{-1}\left(\frac{0.5}{0.4}\right) = 128.6^o \qquad \theta_3 = 90^o$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{0.5}{0.4}\right) = 51.3^o \qquad B = \tan^{-1}\left(\frac{0.5}{0.9}\right) = 29^o$$

$$\phi = 180^o - (128.6^o + 51.3^o + 90^o) + 29^o$$

$\phi = -69^o$

Regla 8: Existen polos adyacentes sobre el eje real, por lo tanto, el lugar geométrico de las raíces abandona el eje en el punto que cumple con:

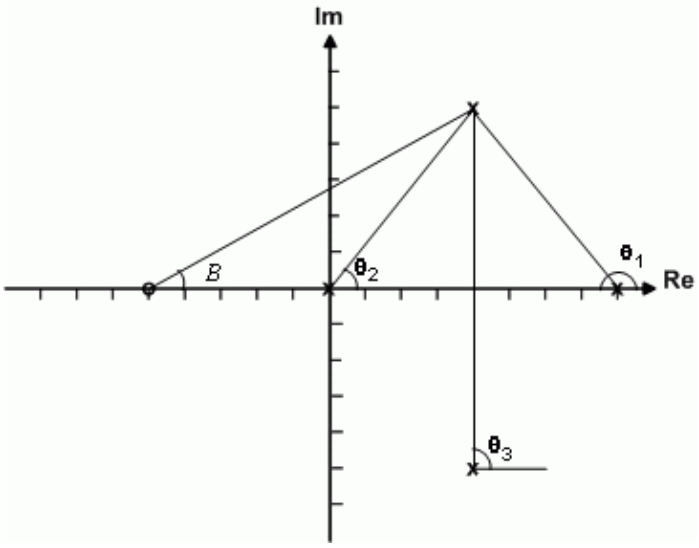


Figura 4.17 Cálculo del ángulo de partida del polo

$$\frac{dK}{dz} = 0 \qquad 1 + HG(z) = \frac{0.5K(z+0.5)}{z(z-0.8)(z^2-0.8z+0.41)} = 0$$

Entonces:

$$K = -\frac{2z(z-0.8)(z^2-0.8z+0.41)}{z+0.5}$$

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{3z^4-1.2z^3-1.35z^2+1.05z-0.164}{(z-0.5)^2} = 0$$

$$3z^4-1.2z^3-1.35z^2+1.05z-0.164 = 0$$

Resolviendo para z se obtiene: $z = -0.8047,\ z = 0.2303,\ z = 0.4872 \pm j0.24$. Es decir, el lugar geométrico de las raíces abandona el eje en $z = 0.2303$ (punto entre los dos polos adyacentes).

Regla 9: Intersección del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario.

$$1 + \frac{0.5K(jv + 0.5)}{jv(jv - 0.8)(-v^2 - j0.8v + 0.41)} = 0$$

$$jv(jv - 0.8)(-v^2 - j0.8v + 0.41) + 0.5K(jv + 0.5) = 0$$

Igualando parte real y parte imaginaria a cero:

$$v^4 - 1.05v^2 + 0.25K = 0$$

$$1.6v^3 - 0.328v + 0.5Kv = 0$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se obtiene: $K = 0.358,\ v = \pm 0.305$. Es decir, el lugar geométrico de las raíces corta al eje imaginario en $z = \pm j0.305$ con $K = 0.358$. El valor de la ganancia crítica se obtiene haciendo $|KHG(z)| = 1$. De la figura 4.18 se deduce que $|KHG(z)| = 1$ para $z = 0.81 + j0.58$, por lo tanto:

$$\left|\frac{0.5K(1.31 + j0.58)}{(0.81 + j0.58)(0.01 + j0.58)(0.1249 + j0.4756)}\right| = 1 \qquad 2.52K = 1$$

Es decir, la ganancia crítica es $K = 0.396$

La figura 4.18 representa el lugar geométrico de las raíces para el sistema del ejemplo 4.8.

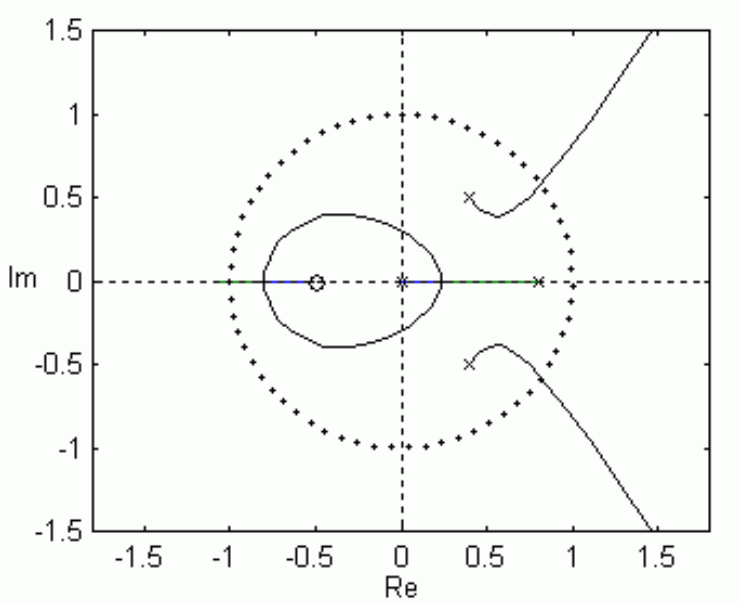


Figura 4.18 Lugar geométrico de las raíces para el ejemplo 4.8

4.5 MÉTODO DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

Al igual que en los sistemas continuos, el método de respuesta en frecuencia representa una herramienta muy útil en el diseño de sistemas de control en tiempo discreto.

Al realizar pruebas de respuesta en frecuencia en un sistema discreto, se recomienda que el sistema tenga un filtro pasa-bajo antes del muestreador, con el fin de que las bandas laterales estén centradas. Así, el sistema lineal e invariante en el tiempo, modifica solamente la amplitud y la fase de la señal de entrada senoidal, conservando su frecuencia.

A continuación se analiza la respuesta de un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo, ante una entrada senoidal, como se muestra en la figura 4.19.

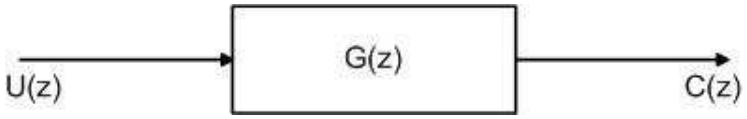


Figura 4.19 sistema de tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo

De la figura 4.19 se obtiene:

$$C(z) = G(z).U(z) \tag{4.58}$$

Si se asume que la señal de entrada es la señal muestreada $u(kT) = sin(kwT)$ resulta:

$$U(z) = \Im\{\sin(wt)\} = \Im\{\sin(kwT)\} = \frac{z.sin(wT)}{(z - e^{jwT})(z - e^{-jwT})}$$

La respuesta del sistema es:

$$C(z) = \frac{G(z)z\sin(wT)}{(z - e^{jwT})(z - e^{-jwT})} = \frac{k_1 z}{z - e^{jwT}} + \frac{k_2 z}{z - e^{-jwT}} + C_g(z) \tag{4.59}$$

En donde $C_g(z)$ corresponde a las componentes de $C(z)$ originadas por los polos de $G(z)$. Si el sistema es estable, dichas componentes en $c(kT)$ tienden a cero a medida que el tiempo se incrementa. Así, la respuesta de estado estable del sistema es:

$$C_{ss}(z) = \frac{k_1 z}{z - e^{jwT}} + \frac{k_2 z}{z - e^{-jwT}} \qquad 4.60$$

De 4.59 se deduce que el valor de k_1 está dado por:

$$k_1 = \frac{G(e^{jwT})\sin(wt)}{e^{jwT} - e^{-jwT}} = \frac{G(e^{jwT})}{2j} \qquad 4.61$$

Expresando a $G(e^{jwT})$ como: $G(e^{jwT}) = |G(e^{jwT})|e^{j\theta}$ se obtiene:

$$k_1 = \frac{|G(e^{jwT})|e^{j\theta}}{2j} \qquad 4.62$$

Como k_2 es el complejo conjugado de k_1, resulta que:

$$k_2 = \frac{|G(e^{jwT})|e^{-j\theta}}{2(-j)} = -\frac{|G(e^{jwT})|e^{-j\theta}}{2j} \qquad 4.63$$

Reemplazando las ecuaciones 4.62 y 4.63 en la 4.60 se obtiene:

$$C_{ss}(z) = \frac{|G(e^{jwT})|ze^{j\theta}}{2j(z - e^{jwT})} - \frac{|G(e^{jwT})|ze^{-j\theta}}{2j(z - e^{-jwT})}$$

$$C_{ss}(z) = \frac{|G(e^{jwT})|}{2j}\left[\frac{ze^{j\theta}}{z - e^{jwT}} - \frac{ze^{-j\theta}}{z - e^{-jwT}}\right]$$

Tomando la transformada inversa z a esta última expresión resulta:

$$C_{ss} = |G(e^{jwT})|\left[\frac{e^{j(wkT+\theta)} - e^{-j(wkT+\theta)}}{2j}\right]$$

$$C_{ss} = |G(e^{jwT})|\sin(kwT + \theta) \qquad 4.64$$

Como puede verse, si la entrada a un sistema discreto estable es una señal senoidal de frecuencia w, la respuesta de estado estable del sistema es también senoidal con la misma frecuencia. La amplitud de la respuesta es igual a amplitud de la entrada multiplicada por $|G(e^{jwT})|$ y el ángulo de fase de la respuesta es igual al ángulo de fase de la entrada más el ángulo de $G(e^{jwT})$. Por lo tanto, para obtener la respuesta en frecuencia de $G(z)$, solo es necesario reemplazar a z por e^{jwT} en $G(z)$.

La función $G(e^{jwT})$ se conoce comúnmente con el nombre de **"Función de transferencia de pulso senoidal"**.

Dado que el reemplazo de z por e^{jwT} en $G(z)$, presenta algunos inconvenientes para el análisis de la respuesta en frecuencia se prefiere, para ello, transformar la función de transferencia de pulso en el plano z en la correspondiente en el plano w utilizando la " **Transformación bilineal"** definida por:

$$z = \frac{1 + \frac{Tw}{2}}{1 - \frac{Tw}{2}} \qquad 4.65$$

En donde T es el periodo de muestreo del sistema.

Una vez que la función de transferencia de pulso $G(z)$ se haya transformado en $G(w)$ mediante la transformación bilineal, podrá tratarse como un función de transferencia convencional en w, es decir, se le podrán aplicar las técnicas de diseño establecidas para los sistemas continuos.

4.5.1 Diagramas de Bode: un diagrama de Bode consta de dos trazados, uno es el diagrama del logaritmo del módulo de la función de transferencia senoidal y el otro, es el diagrama del ángulo de fase. Los dos diagramas se representan en función de la frecuencia en la escala logarítmica.

En la representación logarítmica se dibujan las curvas en papel semilogarítmico, utilizando la escala logarítmica para la frecuencia y la escala lineal para la amplitud en decibeles (db) y para el ángulo de fase en grados.

Los diagramas de Bode juegan un papel importante en el diseño de sistemas de control digital aplicando técnicas convencionales y su análisis, indica qué modificaciones son necesarias en la función de transferencia de lazo abierto para obtener las características de respuesta transitoria deseadas.

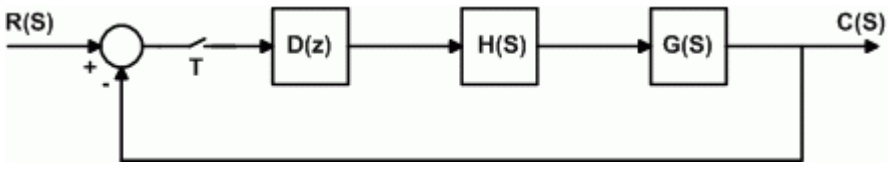


Figura 4.20 Sistema de control digital

Haciendo referencia al sistema de control digital de la figura 4.20, el procedimiento para obtener su respectivo diagrama de Bode es el siguiente [4.9]:

1. Obtener la función de transferencia de pulso de lazo abierto $G(z)$ del sistema.
2. Transformar $G(z)$ en una función $G(w)$, utilizando la transformación bilineal dada por:

$$z = \frac{1 + \frac{Tw}{2}}{1 - \frac{Tw}{2}} \qquad\qquad w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

3. Reemplazar w por jv en $G(w)$ y trazar el diagrama de Bode tal como se procede en los sistemas continuos.

La frecuencia ficticia v y la frecuencia real w se relacionan en la siguiente forma:

$$w|_{w=jv} = jv = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=e^{jwT}} = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{jwT}-1}{e^{jwT}+1}$$

$$w|_{w=jv} = jv = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{jwT/2} - e^{-jwT/2}}{e^{jwT/2} + e^{-jwT/2}} = \frac{2}{T} \cdot j \tan\left(\frac{wT}{2}\right)$$

Es decir:

$$v = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{wT}{2}\right) \qquad 4.66$$

4.5.2 Margen de ganancia y Margen de fase: Estas dos magnitudes constituyen una medida de la estabilidad relativa de un sistema de control.

Margen de ganancia (MG): Se define como la magnitud del recíproco de la función de transferencia de lazo abierto, calculada a la frecuencia de cruce de fase (v_π)

$$MG = \frac{1}{|G(jv_\pi)|} \qquad 4.67$$

$$MG(db) = 20 \log \frac{1}{|G(jv_\pi)|} \qquad 4.68$$

El Margen de ganancia es el negativo del valor en db de la función de transferencia en lazo abierto evaluada a la frecuencia de cruce de fase y mide que tanto se puede incrementar la ganancia de lazo abierto, antes de que el sistema se haga inestable.

Frecuencia de cruce de fase (v_π)**:** Es la frecuencia a la cual el ángulo de fase de la función de transferencia de lazo abierto alcanza -180º, es decir:

$$\theta_c = \measuredangle G(jv_\pi) = -180^o \qquad 4.69$$

Margen de fase (ϕ_{PM})**:** Se define como la suma de 180º al ángulo θ_c, medido a la frecuencia de cruce de ganancia.

$$\phi_{PM} = 180^o + \theta_c \qquad 4.70$$

Frecuencia de cruce de ganancia (v_c)**:** Se define como la frecuencia a la cual la magnitud de la función de transferencia de lazo abierto es igual a 1 es decir 0 db.

$$|G(jv_c)| = 1 \qquad 4.71$$

$$20\log|G(jv_c)| = 0 \qquad 4.72$$

La figura 4.21 representa la forma de determinar, a partir del diagrama de Bode, el margen de ganancia y el margen de fase.

Para lograr un funcionamiento satisfactorio del sistema de control, el margen de ganancia debe ser superior a 6 db y el margen de fase debe estar comprendido entre 30º y 60º.

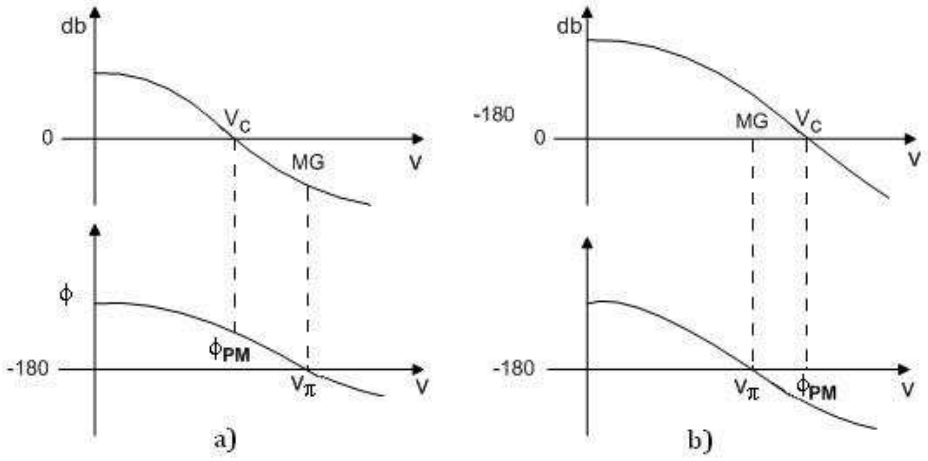


Figura 4.21 a) Márgenes de ganancia y de fase positivos: sistema estable. b) Márgenes de ganancia y de fase negativos: sistema inestable

Es importante tener presente que ni el margen de ganancia solo, ni el margen de fase solo dan indicación suficiente de la estabilidad relativa. Deben especificarse ambos para poder determinar la estabilidad relativa.

Para un sistema de control, tanto el margen de ganancia como el margen de fase deben ser positivos para que el sistema sea estable. Márgenes negativos indican inestabilidad.

EJEMPLO 4.9

Para el sistema de control digital de la figura 4.22, con $T = 0.8\,s$, obtener el diagrama de Bode correspondiente para $K = 1$ y determinar: a) El margen de ganancia y el margen de fase. b) El valor crítico de K para estabilidad del sistema. c) El valor de K para el cual el margen de ganancia es igual a 5 db, cual es el margen de fase en este caso? d) El valor de K para el cual el margen de fase es de 60º, cual es el margen de ganancia en este caso?

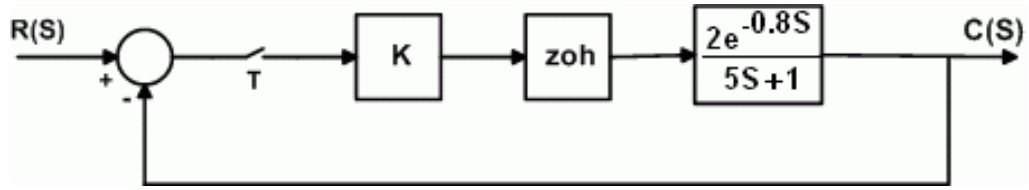


Figura 4.22 Sistema de control digital para el ejemplo 4.9

SOLUCIÓN: La función de transferencia de pulso para el sistema se obtiene utilizando la transformada z modificada.

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

En donde:

$$N = \frac{\theta'}{T} = \frac{0.8}{0.8} = 1 \qquad \theta = \theta' - NT = 0 \qquad m = 1 - \frac{\theta}{T} = 1$$

Entonces:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-1}\Im_m\left\{\frac{2}{S(5S+1)}\right\} = 2(1 - z^{-1})z^{-1}\Im_m\left\{\frac{0.2}{S(S+0.2)}\right\}$$

De tablas se obtiene:

$$HG(z) = \frac{0.2957}{z(z - 0.8521)}$$

Para obtener el diagrama de Bode se transforma $HG(z)$ en $HG(w)$ utilizando la transformación bilineal.

$$z = \frac{1 + \frac{Tw}{2}}{1 - \frac{Tw}{2}} = \frac{1 + 0.4w}{1 - 0.4w}$$

Es decir:

$$HG(w) = \frac{0.2957}{\left[\frac{1 + 0.4w}{1 - 0.4w}\right]\left[\frac{1 + 0.4w}{1 - 0.4w} - 0.8521\right]}$$

$$HG(w) = \frac{2(1 - 0.4w)^2}{(1 + 0.4w)(1 + 5.008w)} = \frac{0.1597(2.5 - w)^2}{(2.5 + w)(0.1996 + w)}$$

Ahora se reemplaza w por jv en la expresión correspondiente a $HG(w)$ y se obtiene:

$$HG(jv) = \frac{0.1597(2.5 - jv)^2}{(2.5 + jv)(0.1996 + jv)}$$

Por lo tanto:

$$|HG(jv)| = \frac{0.1597\sqrt{6.25 + v^2}}{\sqrt{(6.25 + v^2)(0.03984 + v^2)}} = 0.1597\sqrt{\frac{6.25 + v^2}{0.03984 + v^2}}$$

$$\theta = \measuredangle HG(jv) = -3\tan^{-1}\left(\frac{v}{2.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v}{0.1996}\right)$$

Los valores de $20\log|HG(jv)|$ y de θ para diferentes valores de la frecuencia v se dan en la tabla que se muestra a continuación.

v	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	1.0	1.5	1.7	3	rad/s
$20\log\|HG(jv)\|$	5.05	3.03	0.95	-0.87	-3.75	-7.5	-10.23	-10.99	-13.66	db
θ	-33.4	-58.7	-76.9	-90.7	-112.0	-144.1	-175.3	-185.9	-236.7	deg

La figura 4.23 muestra el diagrama de Bode del sistema y de él se puede obtener que el margen de ganancia es $MG = 10.58\,db$, el margen de fase es $\phi_{PM} = 95.8^o$ y las frecuencias de cruce de ganancia y de cruce de fase son $v_c = 0.347\,rad/s$ y $v_\pi = 1.58\,rad/s$ respectivamente. Si se utilizan los valores dados en la tabla se pueden obtener los datos de margen de ganancia y de margen de fase en forma aproximada sin incurrir en errores significativos.

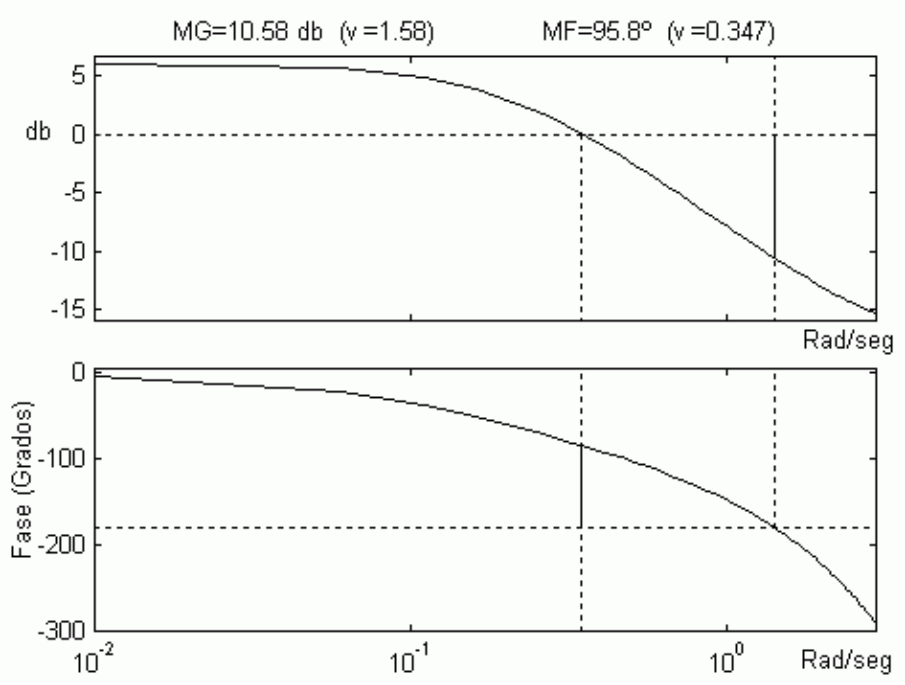


Figura 4.23 Diagrama de bode para el ejemplo 4.9

SOLUCIÓN ANALÍTICA: se obtiene aplicando directamente las ecuaciones y las definiciones de margen de ganancia y de margen de fase.

a) El margen de ganancia se calcula con la ecuación 4.68 siendo v_π la frecuencia a la cual el ángulo de fase es igual a -180^o

$$MG = 20\log\frac{1}{|HG(jv_\pi)|}$$

$$-180^o = -3\tan^{-1}\left(\frac{v_\pi}{2.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v_\pi}{0.1996}\right)$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene: $v_\pi = 1.58\, rad/s$

Por lo tanto:

$$|HG(jv_\pi)| = 0.1597\sqrt{\frac{6.25 + v_\pi^2}{0.03984 + v_\pi^2}} = 0.1597\sqrt{\frac{6.25 + 1.58^2}{0.03984 + 1.58^2}} = 0.2965$$

$$MG = 20\log\frac{1}{0.2965} \qquad MG = 10.58\, db$$

El margen de fase se calcula con la ecuación 4.70 siendo v_c la frecuencia a la cual la magnitud de la función de transferencia senoidal es igual a uno.

$$\phi_{PM} = 180^o + \theta_c$$

$$|HG(jv_c)| = 0.1597\sqrt{\frac{6.25 + v_c^2}{0.03984 + v_c^2}} = 1$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene $v_c = 0.35\, rad/s$.

Por lo tanto:

$$\theta_c == -3\tan^{-1}\left(\frac{0.35}{2.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0.35}{0.1996}\right) = -84.2^o$$

$$\phi_{PM} = 180^o - 84.2^o \qquad \phi_{PM} = 95.8^o$$

b) El valor crítico de K para estabilidad del sistema se obtiene a partir del margen de ganancia así:

$$MG = 20\log\frac{1}{|HG(jv_\pi)|} \qquad K_{max} = \frac{1}{|HG(jv_\pi)|} = 10^{MG/20}$$

$$K_{max} = 10^{10.58/20} \qquad K_{max} = 3.38$$

c) El margen de ganancia del sistema con un valor específico de K se puede calcular mediante la ecuación:

$$MGK = 20\log\frac{1}{|KHG(jv_\pi)|} \qquad MGK = 20\log\frac{1}{|HG(jv_\pi)|} - 20\log K$$

$$MGK = MG - 20\log K$$

En donde MGK es el margen de ganancia para el valor específico de K y MG es el margen de ganancia con $K = 1$.

Por lo tanto:

$$5 = 10.58 - 20\log K \qquad K = 10^{(10.58-5)/20} \qquad K = 1.9$$

El margen de fase se calcula con θ_c cuando $|KHG(jv_c)| = 1$, entonces con $K = 1.9$ se obtiene:

$$0.1597 * 1.9\sqrt{\frac{6.25 + v_c^2}{0.03984 + v_c^2}} = 1 \qquad v_c = 0.768\, rad/s$$

El ángulo de fase para esta frecuencia es:

$$\theta_c = -3\tan^{-1}\left(\frac{0.768}{2.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0.768}{0.1996}\right) = -126.66^o$$

Entonces:

$$\phi_{PM} = 180^o + \theta_c \qquad \phi_{PM} = 180^o - 126.66^o = 53.34^o$$

d) Para un margen de fase de 60º se tiene:

$$\theta_c = \phi_{PM} - 180^o = -120^o$$

La frecuencia para la cual el ángulo de fase es de -120^o se calcula a partir de la ecuación:

$$-120^o = -3\tan^{-1}\left(\frac{v_c}{2.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v_c}{0.1996}\right) \qquad v_c = 0.689\, rad/s$$

A esta frecuencia la magnitud de la función de transferencia senoidal debe ser igual a 1 (0 db), es decir:

$$0.1597K\sqrt{\frac{6.25 + 0.689^2}{0.03984 + 0.689^2}} = 1 \qquad K = 1.73$$

El margen de ganancia con $K = 1.73$ es:

$$MGK = MG - 20\log K$$

$$MGK = 10.58 - 20\log(1.73) \qquad MGK = 5.81\, db$$

A continuación se presenta un programa en MATLAB® que permite obtener el diagrama de Bode y los márgenes de ganancia y de fase para el sistema del ejemplo 4.9

% Programa para obtener diagrama de Bode.

```
clc
n=[2];
d=[5 1];
[a,b,c,d]=tf2ss(n,d);                 % Obtención de variables de estado
[ad,bd,cd,dd]=c2dt(a,b,c,0.8,0.8);    % Discretiza sistemas con retardo
[nd1,dd1]=ss2tf(ad,bd,cd,dd);         % Función de transferecia de pulso
printsys(nd1,dd1,'z');
pause
w=0.01:0.05:3;
[mag,fase,w]=dbode(nd1,dd1,0.8,w);
imargin(mag,fase,w)
```

PROBLEMAS PROPUESTOS

4.1 La ecuación característica de ciertos sistemas discretos con $T = 0.5\ s$ son:

$a)\ (z-0.3)(z-0.6)(z^2-1)=0$ $c)\ (z-0.5)(z-0.4)(z^2-0.8z+2)=0$

$b)\ (z-0.4)(z-0.8)(z^2-1.9z+1)=0$ $d)\ (z^2-0.5z+0.8)(z^2-0.6z-0.4)=0$

a) Obtenga las raíces de la ecuación característica y ubíquelas en el plano z b) Identifique en cada caso, si el sistema es estable, inestable o marginalmente estable. c) Si el sistema es estable encuentre los términos correspondientes a la respuesta natural del sistema.

4.2 Las ecuaciones características de ciertos sistemas de control digital están dadas por:

$a)\ z^3-1.1z+0.3=0$ $e)\ 1-1.9244z^{-1}+1.204z^{-2}-0.28z^{-3}=0$

$b)\ z^2-0.1z-0.3=0$ $f)\ 1-1.895z^{-1}+1.302z^{-2}-0.40z^{-3}=0$

$c)\ z^3-2.2z^2+1.5z-0.35=0$ $g)\ (1-z^{-1})\,(1+z^{-1}+0.3775z^{-2}2)=0$

$d)\ z^2-2z+0.99=0$ $h)\ z^2-z+0.36=0$

$e)\ z^2-0.36=0$ $i)\ (z^2-0.8)\,(z^2-0.4z+0.1)$

$j)\ z^4-0.923z^3+0.921z^2-0.516z-0.382=0$

a) Obtenga las raíces de la ecuación característica y ubíquelas en el plano z. b) Utilice el criterio de Jury para determinar la estabilidad de cada uno de los sistemas. c) Para cada uno de los sistemas que en la parte a sean estables, calcule los términos correspondientes a la respuesta natural del sistema cuando $T = 1\ s$.

4.3 Considere el sistema de control de la figura 4.24, asuma que $T = 1\ seg$ y $D(z) = K$. a) Determine la función de transferencia de pulso del sistema en lazo cerrado. b) Utilice el criterio de Routh-Hurwist para determinar el rango de K dentro del cual el sistema es estable. Cuál es la frecuencia de oscilación del sistema con la ganancia crítica? c) Utilice el criterio de Jury para corroborar el resultado obtenido en la parte b. d) Si $K = 0.6K_{max}$ obtenga la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando la entrada es $r(t) = u(t)$

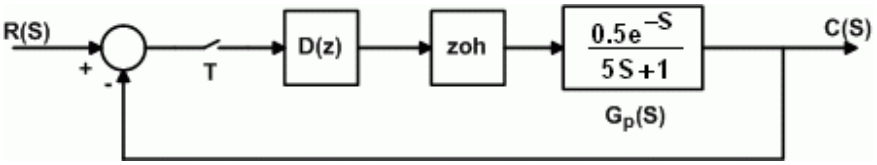


Figura 4.24 Sistema para el problema 4.3

4.4 Considere el sistema de control de la figura 4.25 con $D(z) = K$. a) Escriba la ecuación característica del sistema en lazo cerrado en función del periodo de muestreo T. b) Halle el rango de $K > 0$ para el cual el sistema es estable con $T = 1\ s$, $T = 0.1\ s$ y $T = 0.05\ s$. Que se puede concluir? c) Si el muestreador y el retenedor se eliminan, encuentre el rango de K para el cual el sistema continuo es estable.

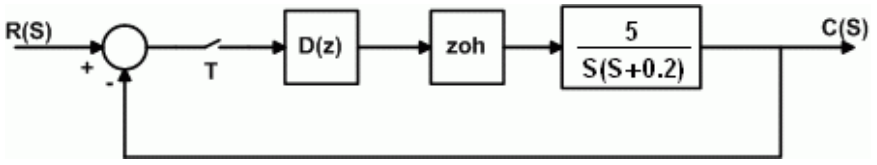


Figura 4.25 sistema para el ejemplo 4.4

4.5 Para el sistema de control de temperatura mostrado en la figura 4.26, con $D(z) = 1, d(t) = 0$ y $T = 0.5\,s$. a) Obtenga y dibuje la respuesta del sistema si la señal de entrada $r(t)$ produce un cambio de 15º C en la señal de salida (la entrada debe ser escalón de 1.2 V por qué?). b) Utilice el resultado de la parte a y dibuje la salida del retenedor de orden cero. c) Cual será el error de estado estable del sistema si la señal de entrada es un escalón $r(t) = 2u(t)$? d) Si se hace $r(t) = 2u(t)$ y $d(t) = 0.2u(t)$ cual es el valor de la salida del sistema en estado estable? e) Calcule el valor de la temperatura en estado estable cuando $r(t) = 2u(t)$, $d(t) = 0.2u(t)$ y

$$D(z) = \frac{0.3z - 0.4}{z - 1}$$

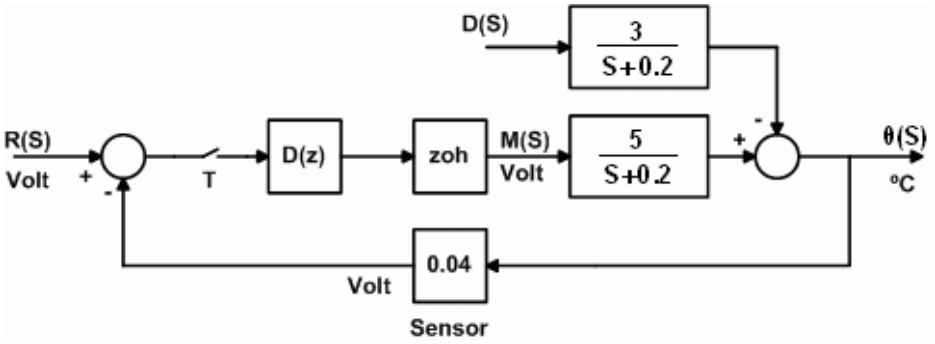


Figura 4.26 Sistema para el problema 4.5

4.6 Para el sistema de control de la figura 4.27 asuma que $T = 1$ y $D(z) = 1$ a) Calcule el coeficiente de amortiguamiento ξ, la frecuencia natural no amortiguada w_n y la constante de tiempo del sistema discreto en lazo abierto. Si la ecuación característica del sistema tiene ceros reales, evalúe sus constantes de tiempo. b) Repita la parte a para el sistema en lazo cerrado. c) Repita las partes a y b para el sistema continuo obtenido al remover el muestreador, el controlador digital y el retenedor. d) Analice la estabilidad para el sistema discreto y para el sistema continuo en lazo cerrado. e) Resuelva el problema si:

$$G_p(S) = \frac{0.5}{(S + 0.2)(S + 0.1)}$$

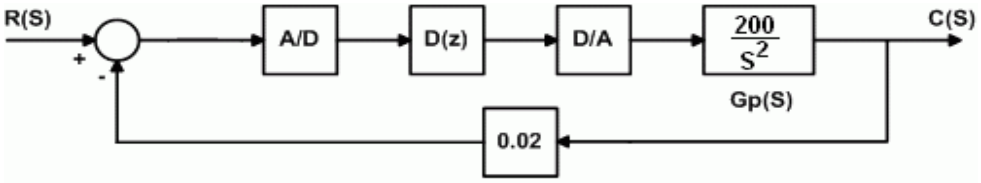


Figura 4.27 Sistema para el problema 4.6

4.7 Considere el sistema de la figura 4.28 con $T = 1\ s$. El controlador digital $D(z)$ está descrito por la ecuación en diferencias:

$$m(k) = 2e(k) - 1.5e(k-1) + m(k-1)$$

a) Determine el tipo de sistema. b) Calcule el valor del error en estado estable y el de la respuesta del sistema en lazo cerrado ante una entrada en escalón unitario, sin hallar la expresión para $C(z)$. c) Calcule el tiempo aproximado para el cual el sistema alcanza su estado estable. d) Calcule la respuesta $c(kT)$ del sistema. e) Repita las partes b, c y d si la entrada es una rampa unitaria.

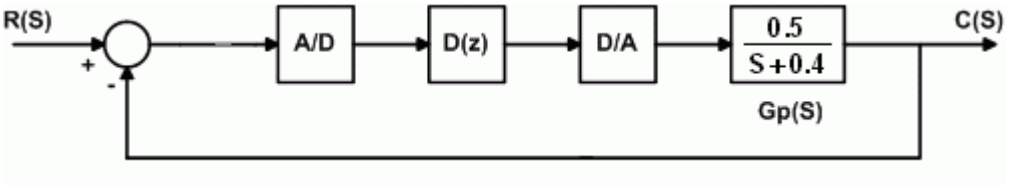


Figura 4.28 Sistema de control para el problema 4.7

4.8 Cierto sistema de control digital tiene como ecuación característica:

$a)\ z - 0.8 = 0$

$b)\ z^2 - 1.4z + 0.5 = 0$

$c)\ z^2 - 0.4z + 0.9 = 0$

$d)\ z^2 - 1 = 0$

$e)\ z + 0.98 = 0$

$f)\ z^2 - 1.2z + 0.8 = 0$

$g)\ z^2 - 2z + 0.99 = 0$

$h)\ z^3 - 1.3z^2 + z - 0.3 = 0$

a) Que se puede decir acerca de las características de la respuesta natural del sistema para $T = 0.2\ s$.? b) Repita la parte a para $T = 1.5\ s$. c) Para una

ecuación característica determinada, que parámetros de la respuesta temporal se afectan al variar el periodo de muestreo T y cuales son independientes de T?

4.9 a) Si en el sistema de control de la figura 4.28 $D(z) = K$ y $T = 1\,s$, determinar el máximo valor de K que asegura la estabilidad del sistema. b) Repita la parte a si la función de transferencia del proceso es $G_p(S) = 1/S(S + 0.1)$ c) Construir el lugar geométrico de las raíces para cada uno de los casos a y b.

4.10 Para el sistema de control digital mostrado en la figura 4.29, construya el L.G.R, determine el valor máximo de K que asegure la estabilidad del sistema y determine las coordenadas del punto en donde el lugar geométrico de las raíces corta al círculo unitario. Asuma que el periodo de muestreo es: a) $T = 0.2\,s$ b) $T = 0.4\,s$ y que:

$a)\ \ G_p(S) = \dfrac{1}{S(S + 0.5)}$ $\qquad$ $c)\ \ G_p(S) = \dfrac{e^{-0.2S}}{(S + 1)(S + 2)}$

$b)\ \ G_p(S) = \dfrac{0.5S}{(S + 1)(S + 0.5)}$ $\qquad$ $d)\ \ G_p(S) = \dfrac{e^{-0.1S}}{S(0.8S + 1)}$

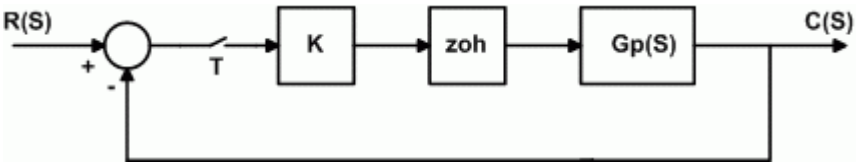


Figura 4.29 Sistema de control para el problema 4.10

4.11 Considere el sistema control digital que se muestra en la figura 4.30. Trace el lugar geométrico de las raíces al variar K desde cero hasta infinito. Determine el valor crítico de la ganancia K para estabilidad crítica. Si $T = 0.2\,s$, que valor de la ganancia K dará un factor de amortiguamiento relativo $\xi = 0.6$, para los polos de lazo cerrado? Con la ganancia K evaluada para obtener $\xi = 0.6$ cual es la frecuencia natural del sistema?

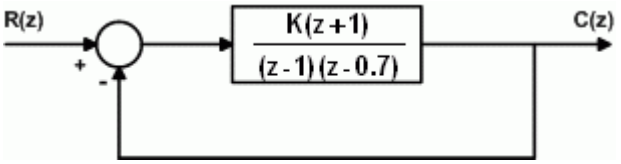


Figura 4.30 Sistema para el problema 4.11

4.12 La función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control digital con realimentación unitaria está dada por:

$a)\ G(z) = \dfrac{k(z+1)}{z(z-0.5)(z^2-1.6z+0.89)}$ $\qquad b)\ G(z) = \dfrac{kz}{(z-1)(z-0.4)(z-0.8)}$

$c)\ G(z) = \dfrac{k(z+0.5)}{z(z-0.6)(z-0.8)}$ $\qquad d)\ G(z) = \dfrac{k(z^2-1.6z+0.89)}{z(z-1)(z-0.4)(z-0.5)}$

a) Trace, para cada caso, el lugar geométrico de las raíces, determine su intercepto con el círculo unitario y establezca las coordenadas del punto en el cual se da dicha intersección. b) Escriba un programa en MATLAB que le permita resolver el problema. c) Calcule el rango de valores de k dentro del cual el sistema es estable.

4.13 La figura 4.31a muestra un sistema discreto y la 4.31b un sistema continuo. Determine la función de transferencia de pulso $G(z)$ para el sistema discreto asumiendo que los muestreadores trabajan sincronizadamente y con un periodo de muestreo $T = 0.2\,s$. Determine la ganancia de cada uno de los sistemas cuando la entrada es una onda senoidal de frecuencia 1, 10, 100,1000 y 10000 rad/s. Explique brevemente los resultados.

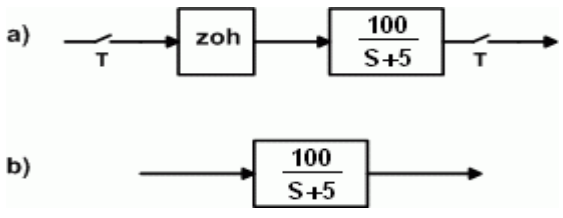


Figura 4.31 sistemas a) Discreto b) Continuo para el problema 4.13

4.14 Para el sistema de control discreto mostrado en la figura 4.32 con $T = 1\,s$, y $K = 1$, a) Trace el diagrama de Bode. b) Determine el margen de ganancia y el margen de fase. c) Determine el valor de K que dé un margen de fase de 45º, cual es el margen de ganancia en este caso? d) A partir del diagrama de Bode obtenga el valor de K que hace marginalmente estable al sistema.

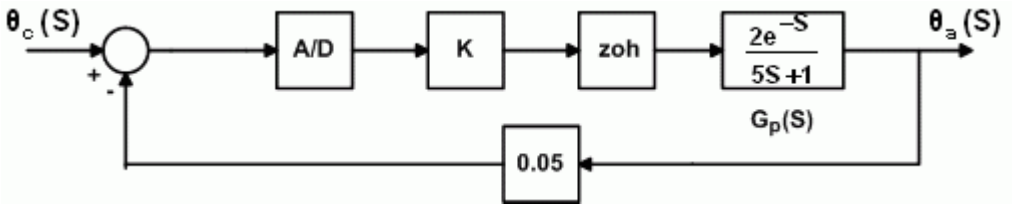


Figura 4.32 Sistema discreto para el problema 4.14

4.15 Considere el sistema de la figura 4.33 con periodos de muestreo $T = 1\,s$ y $T = 2\,s$. a) Con $K = 1$ trace el diagrama de Bode para cada caso y calcule el margen de ganancia y el margen de fase. Cuál es el valor crítico de K en cada caso? Qué conclusiones puede sacar con estos resultados? b) Calcule el valor de K para que el margen de ganancia sea de 10 db. Cual es el margen de fase con ese valor de K? c) Calcule el valor de K para obtener un margen de fase de 45º. Cuál es el margen de ganancia en este caso? d) Si $K = 0.5$ cuales son el margen de ganancia y el margen de fase del sistema?

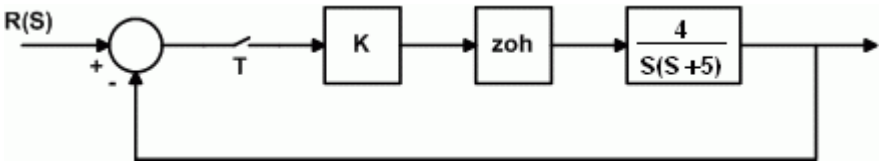


Figura 4.33 Sistema de control para el problema 4.15

4.16 Considere el sistema de control dado en el problema 4.10 (figura 4.29), con $K = 1$. a) Trace, para cada caso, el diagrama de Bode del sistema y analice su

estabilidad relativa a partir del margen de ganancia y del margen de fase. b) Si el sistema es estable, determine el valor de K que suministre un margen de ganancia de 10 db. c) Determine, para cada caso, el valor crítico de K para estabilidad del sistema.

4.17 Un sistema discreto está modelado por la ecuación en diferencias:

$$y(k+2) - 1.3205y(k+1) + 0.49659y(k) = 0.098327x(k+1) + 0.077779x(k)$$

En donde $x(k)$ es la entrada e $y(k)$ es la salida. a) Determine y dibuje la respuesta del sistema cuando la entrada es un escalón unitario. Asuma que $y(k) = 0$ para $k \leq 0$. b) Trace el diagrama de Bode para el sistema, determine su margen de ganancia, su margen de fase y analice su estabilidad.

4.18 Para el sistema de la figura 4.34 con $K = 1$ y $T = 0.2\,s$. a) Dibuje el lugar geométrico de las raíces y determine el rango de K para el cual el sistema es estable. b) Calcule y dibuje la localización de los polos del sistema discreto en lazo cerrado para $K = 1$, $K = 2.91$ y $K = 5$. c) Calcule el valor de K para que el sistema tenga coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.5$. d) Utilice el criterio de Jury para corroborar el resultado obtenido en la parte a.

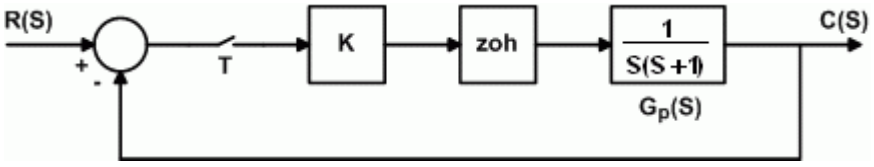


Figura 4.34 Sistema para el problema 4.18

4.19 La figura 4.35 corresponde al diagrama en bloques del sistema de control de la velocidad en vacío de un motor a gasolina. Si $T = 0.02\,s$, a) Obtenga la respuesta de la velocidad $w(kT)$ ante un escalón unitario. Cuál es la velocidad máxima? b) Cual es el margen de ganancia y el margen de fase del sistema? c) Repita el problema para $T = 0.05\,s$.

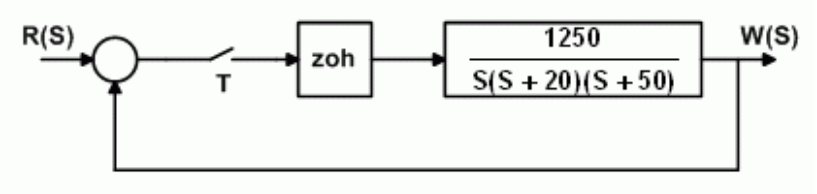


Figura 4.35 Sistema de control para el problema 4.19

4.20 La figura 4.36 muestra el diagrama de instrumentación para el control digital de la temperatura de un horno. El sistema se muestreó cada 0.1 min.

La dinámica de los elementos componentes del sistema se puede modelar así: Horno: sistema de segundo orden. Ganancia 0.6, constantes de tiempo de 0.5 min y 1.25 min y retardo de 0.2 min. Válvula: Sistema de primer orden. Ganancia 1 y constante de tiempo 0.2 min. Medición: sistema de primer orden (sensor y transmisor de temperatura): ganancia 0.1 y constante de tiempo 0.2 min. Se utiliza un controlador proporcional con ganancia K_C para regular el sistema. a) Calcular la ganancia K_C máxima que se le puede dar al controlador para obtener estabilidad crítica. b) Determinar el valor de K_C para que el sistema tenga un margen de ganancia de 10 db, cual es el margen de fase en este caso? c) Determinar el error de estado estable del sistema ante una entrada en escalón unitario cuando el valor de K_C es igual al obtenido en el literal b.

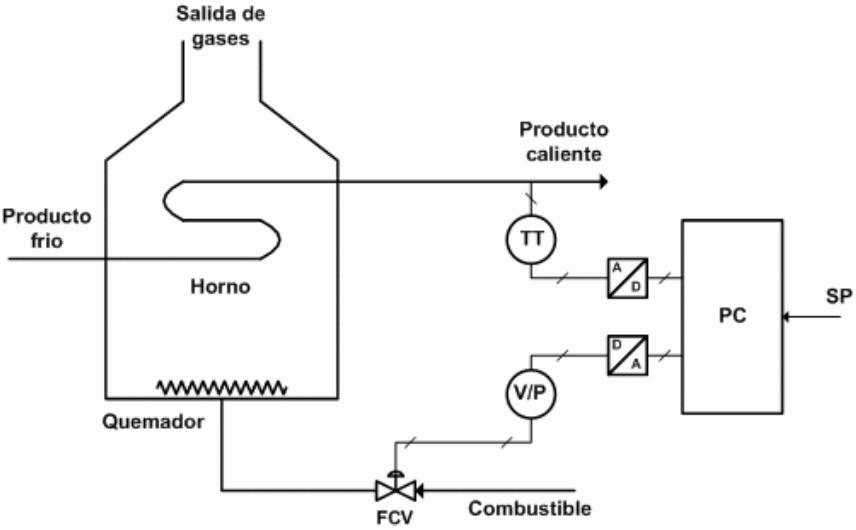


Figura 4.36 Sistema de control para la temperatura del horno

4.21 La figura 4.37a representa el modelo simplificado de un motor de DC controlado por armadura y la figura 4.37b el diagrama de bloques para el control del mismo. R_a y L_a representan la resistencia y la inductancia de la misma y $V_g(t)$ la fuerza contraelectromotríz inducida $\omega(t)$ corresponde a la velocidad del motor y $T_g(t)$ el torque generado por el mismo. $T_f(t)$, $T_j(t)$, y $T_L(t)$ son los torques correspondientes a la fricción, a la inercia del motor y a la carga respectivamente. $V_f(t)$ es constante.

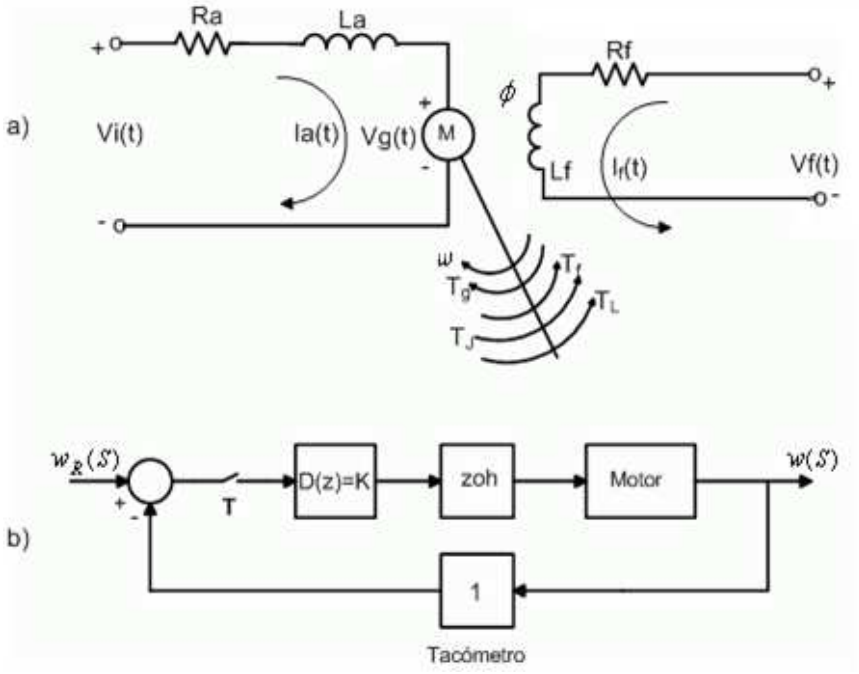


Figura 4.37 Modelo de motor DC para el problema 4.21

El circuito de la armadura se modela mediante la ecuación:

$$v_i(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_g(t)$$

La fuerza contraelectromotríz inducida en la armadura es proporcional a la velocidad de giro del motor.

$$v_g(t) = K_e \omega(t)$$

El torque generado por el motor $T_g(t)$ es proporcional a la corriente en la armadura.

$$T_g(t) = K_t i_a(t)$$

En cualquier instante, el torque desarrollado por el motor es igual a la suma de los torques correspondientes a la fricción, la inercia y la carga.

$$T_g(t) = T_f(t) + T_L(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t)$$

En donde J es el momento de inercia del rotor y B el coeficiente de fricción viscosa. a) Obtenga la función de transferencia del motor $W(S)/V_i(S)$ utilizando las ecuaciones dadas. Asuma que $T_f(t) = T_L(t) = 0$. b) Suponga que el periodo de muestreo es $T = 0.05\,s$ y obtenga la función de transferencia de pulso $\frac{W(z)}{V_i(z)}$. c) Calcule el valor de K para estabilidad crítica del sistema discreto. d) Con $K = 0.5K_{max}$, cual es el margen de ganancia del sistema? e) Con $K = 0.5K_{max}$ cual es el error de estado estable del sistema cuando la velocidad de referencia es $\omega_R = 570\,rad/s$?

Los parámetros para el motor son: $R_a = 3\,\Omega,\ L_a = 5\,mH,\ K_t = 5 \times 10^{-2}\,Nxm/A$, $Ke = 5.4 \times 10^{-2}\,V \times s/Rad$, $J = 5 \times 10^{-5}\,Kg \times m^2$, $B = 3 \times 10^{-5}\,Kg \times m^2/s$.

4.22 La figura 4.38 muestra el diagrama de un tanque en el que se realiza una reacción química exotérmica a la cual se le debe controlar la temperatura manipulando el flujo de agua fría a través del serpentín. Un análisis de la dinámica y de las características de los elementos del sistema arrojó los siguientes resultados:

Transmisor de temperatura: rango de 0 ºC a 100 ºC, ganancia unitaria.

Flujo máximo del agua de enfriamiento: 200 GPM

Válvula: Sistema de primer orden, ganancia 1.25 y constante de tiempo 0.1 min.

Tanque: Un incremento de 10 GPM en el flujo de agua de enfriamiento produjo una caída de temperatura de 5 ºC después de un tiempo considerable. Esa misma prueba permitió establecer que la constante de tiempo y el retardo del tanque eran 2.5 min y 0.5 min respectivamente. El sistema se muestreo cada 0.5 min.

a) Complete el diagrama de instrumentación necesario para realizar el control digital del sistema. b) Si se utiliza un controlador proporcional para realizar el

control se recomienda ajustar su ganancia tal que $K_c = 0.5K_{max}$ utilice el criterio de Jury para calcular K_c c) Con $K_c = 0.5K_{max}$ cuales son el coeficiente de amortiguamiento del sistema en lazo cerrado y el tiempo de establecimiento aproximado del mismo? Cuál es el error de estado estable ante un cambio en escalón unitario aplicado en la referencia?

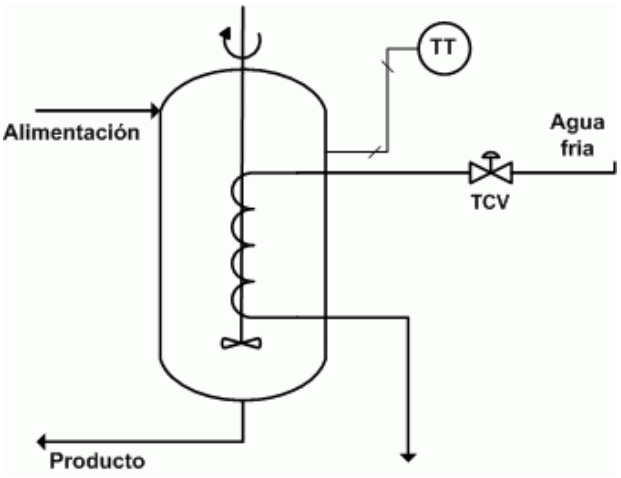


Figura 4.38 Tanque de reacción para el problema 4.22

4.23 La presión de un sistema de almacenamiento de un cierto gas se regula por medio de un sistema como el que se muestra en la figura 4.39 manipulando la línea de salida de gas. El sistema opera normalmente a una presión de 40 PSI en el depósito de almacenamiento y con una apertura de la válvula del 40%. Para determinar el modelo del proceso se aplicó un escalón del 5% en la apertura de la válvula, la dinámica del sistema se aproximó a un modelo de primer orden con retardo y se diseñó para el mismo un controlador PI los resultados obtenidos fueron:

Dinámica del sistema: $G_p(S) = \dfrac{2.5e^{-3S}}{30S + 1}$

Controlador PI diseñado: $D(z) = \dfrac{1.7z - 1.2}{z - 1}$

Los tiempos están en s. El sistema se muestreo cada 5 s.

a) Obtenga el diagrama de bloques del sistema. b) Trace el diagrama de Bode para el sistema discreto y calcule el margen de ganancia y el margen de fase. c) Cuales son el tiempo de establecimiento, el tiempo de pico y el máximo sobreimpulso del sistema en lazo cerrado? d) Calcule el error de estado estable del sistema cuando se aplica a la referencia un cambio en escalón unitario.

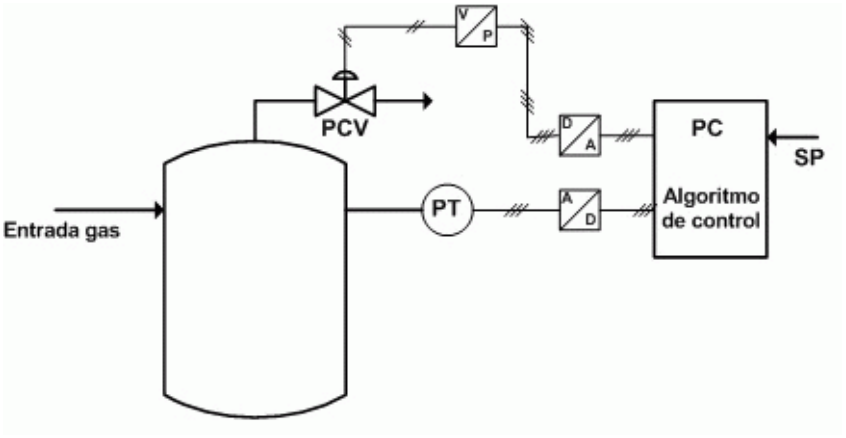


Figura 4.39 Sistema de almacenamiento de gas

4.24 La figura 4.40 corresponde a la respuesta en lazo abierto de un sistema de segundo orden a un escalón $r(t) = 10u(t)$. Calcular para el sistema: a) El máximo sobreimpulso. b) El tiempo de pico. c) La frecuencia natural, el coeficiente de amortiguamiento y la ganancia DC. d) El error en estado estable.

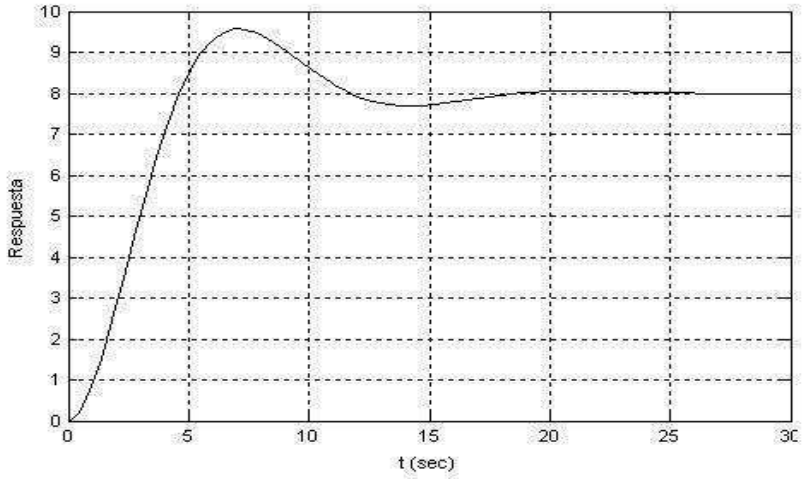


Figura 4.40 Respuesta del sistema para el problema 4.24

REFERENCIAS

[4.1] Ogata, Katsuhico. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall. México. 1996.

[4.2] Leigh, J.R. *Applied digital control. Theory, design and implementation*. Prentice Hall. London. 1992

[4.3] Ogata, Katsuhico. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall. México. 1996.

[4.4] Perdikaris, George. *Computer controlled systems. Theory and applications*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 1996.

[4.5] Franklin, Gene. Powell, David. *Digital control of dynamics systems*. Addison Wesley Publishing Company. Massachusetts. 1994.

[4.6] Kuo, Benjamin. *Sistemas de control automático*. Prentice Hall. México. 1996.

[4.7] Ogata, Katsuhico. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall. México. 1996.

[4.8] Ogata, Katsuhico. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall. México. 1996.

[4.9] Phillips, Charles. Nagle Troy. *Digital control systems analysis and design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs. New Jersey. 1995.

[4.10] Leigh, J.R. Applied digital control. Theory, design and implementation. Prentice Hall. London. 1992

CAPITULO CINCO

IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

La identificación de sistemas tiene por objeto obtener el modelo de un sistema dinámico a partir de datos experimentales.

La figura 5.1 es una representación conceptual de un sistema dinámico. El sistema es comandado por variables de entrada $u(t)$ y por perturbaciones $v(t)$. El usuario puede controlar las variables de entrada $u(t)$, pero no las perturbaciones $v(t)$. Las señales de salida $y(t)$ son variables que suministran información útil acerca del sistema.

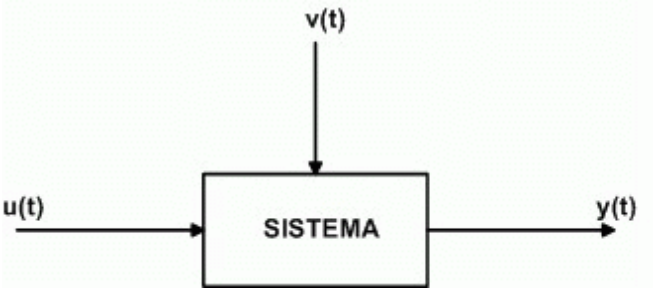


Figura 5.1 Representación de un sistema dinámico.

5.1 TIPOS DE MODELOS

Los modelos de los sistemas dinámicos pueden ser de varias clases, incluyendo los siguientes [5.1]:

Modelos Mentales, Intuitivos o Verbales: éste es el tipo de modelo que se forma por ejemplo cuando se maneja un carro (pisando el freno decrece la velocidad, girando la cabrilla el carro voltea en determinada dirección, etc.)

Modelos Gráficos: En este caso el modelo del sistema está dado mediante una gráfica. Un diagrama de Bode de un servo sistema es un ejemplo de un modelo dado en forma gráfica. La respuesta de un sistema ante una entrada en escalón es otro tipo de modelo gráfico.

Modelos Matemáticos: Son aquellos que describen el comportamiento del sistema a partir de ecuaciones diferenciales (sistemas continuos) o de ecuaciones en diferencias (sistemas discretos). Estos modelos son muy utilizados para el análisis, predicción y diseño de sistemas dinámicos, controladores y filtros.

Existen dos formas básicas para obtener el modelo matemático de un sistema dinámico:

Matemáticamente: Es un método analítico en el cual se utilizan leyes físicas, tales como las leyes de Newton y ecuaciones de balance para describir el comportamiento dinámico de un fenómeno o de un proceso.

Identificación del Sistema: Es un método experimental en el cual se realizan algunas pruebas sobre el sistema que permiten obtener los datos necesarios para estimar el valor de los parámetros del modelo representativo del sistema.

5.2 PROCEDIMIENTO PARA LA IDENTIFICACIÓN.

La obtención de un modelo a partir de datos experimentales conlleva las siguientes etapas fundamentales: la recolección de datos, la selección del modelo y la validación del modelo.

5.2.1 Recolección de datos: Los datos de entrada y salida se pueden obtener mediante un experimento diseñado específicamente para la identificación del sistema. En este caso, el usuario puede determinar que señales va a medir,

cuándo y cómo las va a medir y también puede escoger las señales de entrada. El objetivo del diseño del experimento es entonces, seleccionar los datos que proporcionen la máxima información posible. En otros casos, el usuario no tiene la posibilidad de realizar el experimento pero puede utilizar los datos obtenidos a partir de la operación normal del sistema y llevar a cabo con ellos la identificación del mismo.

5.2.2 La Selección del Modelo: Esta se realiza a partir de un grupo de modelos, eligiendo el más adecuado y representativo del sistema. Este paso es sin duda, el más importante y al mismo tiempo constituye la etapa más difícil en el procedimiento de la identificación. Es acá en donde el conocimiento previo del sistema y el de las características de cada modelo deben combinarse para obtener resultados satisfactorios. Algunas veces el modelo apropiado sólo se obtiene después de un cuidadoso proceso de modelado.

5.2.3 Validación del Modelo: La evaluación de la calidad del modelo se basa en determinar cómo se desempeña el modelo cuando se trata de reproducir con él los datos obtenidos en la medición experimental. Un comportamiento deficiente del modelo en este aspecto hace que el modelo sea rechazado, mientras que un buen desempeño, proporcionará cierta confianza en el modelo.

Un modelo no se puede aceptar como la última y verdadera descripción del sistema; por el contrario, es mejor mirarlo sólo como una descripción suficientemente buena de ciertos aspectos que son de interés particular para un fin determinado.

5.3 MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN NO PARAMÉTRICOS

Los métodos de identificación no paramétricos se caracterizan porque los modelos son curvas o funciones. Entre estos métodos están: análisis transitorio, análisis de frecuencia, análisis de correlación y análisis espectral.

En el desarrollo de esta sección se aplica método el análisis transitorio y se utiliza como modelo el correspondiente a la respuesta del sistema ante una entrada en escalón.

5.3.1 Modelo: Planta de primer orden con retardo (Modelo POR). La función de transferencia correspondiente a este tipo de planta está dada por:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{Ke^{-\theta' S}}{\tau S + 1} \qquad 5.1$$

En donde K =ganancia de la planta, τ =constante de tiempo, θ' =retardo o tiempo muerto, $y(t)$ es la salida del sistema y $u(t)$ es la entrada.

El procedimiento experimental para estimar el modelo consiste en abrir el lazo de control (llevando el controlador a manual) antes del elemento final de control y crear un pequeño y rápido cambio en escalón en el proceso. La respuesta del sistema se grafica y sobre la curva obtenida se hace el análisis para estimar los valores de la ganancia (K), de la constante de tiempo (τ) y el de el retardo (θ') del proceso. Para lograr lo anterior se procede así:
Se determina el punto de operación del proceso y se aplica al sistema en lazo abierto, un cambio en escalón de magnitud apropiada (ver figura 5.2). Esta operación se debe realizar varias veces cubriendo toda la zona lineal del proceso, luego se promedian los valores obteniendo así una información confiable.

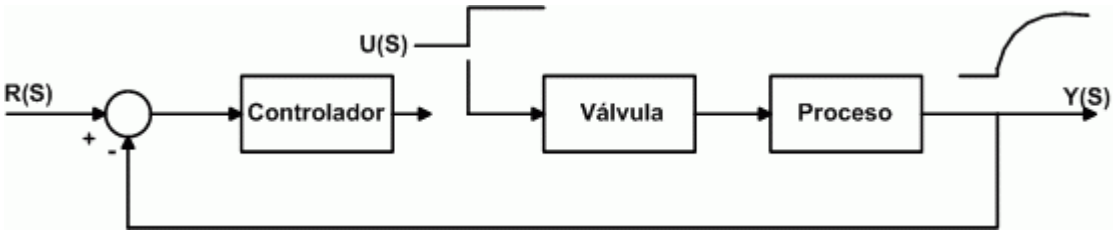


Figura 5.2 Forma de aplicar el escalón para obtener la curva de reacción

En las curvas obtenidas como respuesta, se eligen dos puntos representativos. Por lo general, estos puntos son aquellos para los cuales la respuesta alcanza el 28.3% y el 63.2% de su valor final, estos puntos se presentan cuando los tiempos transcurridos a partir del momento de la aplicación del escalón, al elemento final de control, son respectivamente $\theta' + \tau/3$ y $\theta' + \tau$ (ver figura 5.3).

Con los datos obtenidos de la gráfica se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\theta' + \frac{\tau}{3} = t_1 \qquad 5.2$$

$$\theta' + \tau = t_2 \qquad 5.3$$

Los valores de t_1 y de t_2 se calculan directamente de las cartas que dan las gráficas o de la base de datos obtenida. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones 5.2 y 5.3 se estiman los valores de θ' y τ

Si al resolver las ecuaciones el valor de θ' es negativo, se asume que el sistema no tiene retardo es decir, se hace $\theta' = 0$ y por lo tanto $\tau = t_2$.

El valor de la ganancia K se obtiene mediante el cociente $\Delta Y/\Delta U$ que se interpreta como el cociente entre el cambio de la variable de salida y el cambio en la variable de entrada (valor del escalón de entrada).

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta U} \qquad 5.4$$

El modelo de la planta se obtiene reemplazando los valores de K, τ y θ' en la ecuación 5.1

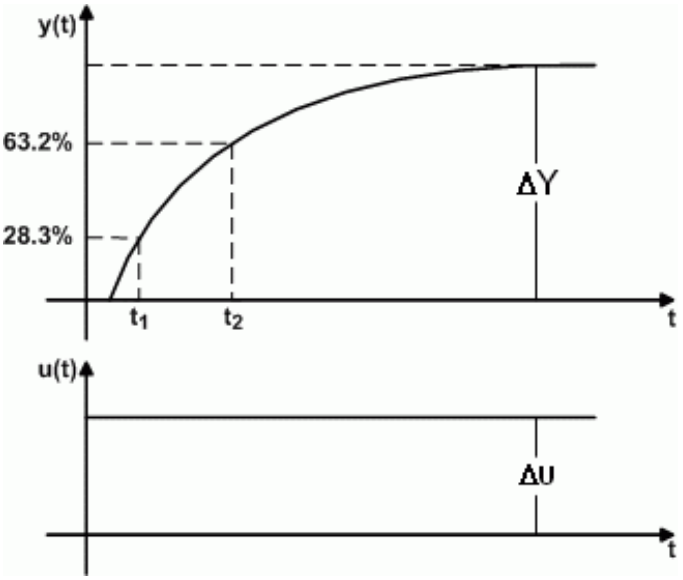


Figura 5.3 Curva de reacción para el modelo POR

5.3.2 Modelo: Planta de segundo orden con retardo (Modelo SOR). La función de transferencia correspondiente a una planta de segundo orden con retardo está dada por:

$$G_p(S) = \frac{Kw_n^2 e^{-\theta' S}}{S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2} \qquad \xi < 1 \qquad 5.5$$

$$G_p(S) = \frac{Ke^{-\theta' S}}{(\tau_1 S + 1)(\tau_2 S + 1)} \qquad \xi \geq 1 \qquad 5.6$$

En donde:

$$\tau_{1,2} = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{w_n} \qquad K = \frac{\Delta \mathrm{Y}}{\Delta \mathrm{U}}$$

Siendo: K =Ganancia de la planta.

w_n =Frecuencia natural.

ξ = Coeficiente de amortiguamiento.

θ' = Tiempo muerto de la planta.

$\tau_1 \; y \; \tau_2$ =Constantes de tiempo.

El procedimiento experimental para estimar el modelo consiste en obtener la curva de reacción o la base de datos del proceso a partir de la aplicación de escalones dentro de la zona de trabajo como se indicó anteriormente.

En la curva obtenida o en la base datos se eligen tres puntos representativos. Estos puntos corresponden a aquellos para los cuales la respuesta del sistema ha alcanzado el 15%, el 45% y el 75% del valor total del cambio experimentado por el sistema ante la aplicación del escalón, como se indica en la figura 5.4.

De la figura 5.4 se obtienen los siguientes parámetros:

ΔY =Cambio total en la salida de la planta.

ΔU =Magnitud del escalón aplicado.

t_1 =Tiempo requerido para que la respuesta alcance el 15% del cambio total.

t_2 =Tiempo requerido para que la respuesta alcance el 45% del cambio total.

t_3 =Tiempo requerido para que la respuesta alcance el 75% del cambio total.

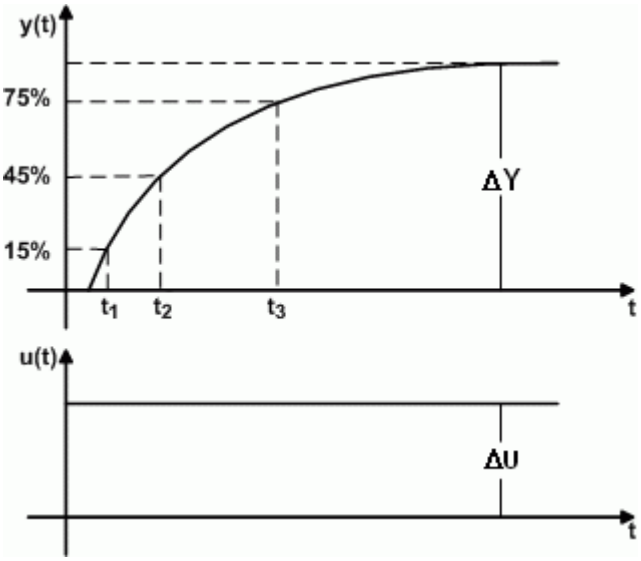


Figura 5.4 Curva de reacción para modelo SOR

Con los valores estimados a partir de la curva de respuesta, para ΔY, ΔU, t_1, t_2 y t_3 se calculan los parámetros del modelo experimental de la planta utilizando las siguientes ecuaciones:

$$x = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \tag{5.7}$$

$$\xi = \frac{0.0805 - 5.547(0.475 - x)^2}{x - 0.356} \tag{5.8}$$

$$F_2(\xi) = \begin{cases} 2.6\xi - 0.6 & \xi \geq 1 \\ 0.708(2.811)^{\xi} & \xi < 1 \end{cases} \tag{5.9}$$

$$w_n = \frac{F_2(\xi)}{t_2 - t_1} \tag{5.10}$$

$$F_3(\xi) = 0.922(1.66)^{\xi} \tag{5.11}$$

$$\theta' = t_2 - \frac{F_3(\xi)}{w_n} \tag{5.12}$$

Si al aplicar la ecuación 5.12 se obtiene un valor negativo para θ', se asume que el modelo de la planta no tiene retardo.

Los valores de los parámetros estimados con las ecuaciones 5.8, 5.10 y 5.12 se reemplazan en la ecuación 5.5 o en la ecuación 5.6 y así se obtiene el modelo experimental de la planta.

EJEMPLO 5.1

La figura 5.5 muestra la respuesta de la presión de un tanque ante una entrada en escalón aplicada en el elemento final de control. a) Aproxime la dinámica del sistema a un modelo de primer orden con retardo. b) Aproxime la dinámica del sistema a un modelo de segundo orden con retardo.

SOLUCIÓN: De la figura 5.5 se obtiene:

Cambio total en la señal de entrada: $\Delta U = 14\% - 9\% = 5\%$

Cambio total en la señal de salida: $\Delta Y = 17.5\% - 10\% = 7.5\%$

Los tiempos se miden a partir de la aplicación del escalón, en este caso a partir de $t = 10\ s$.

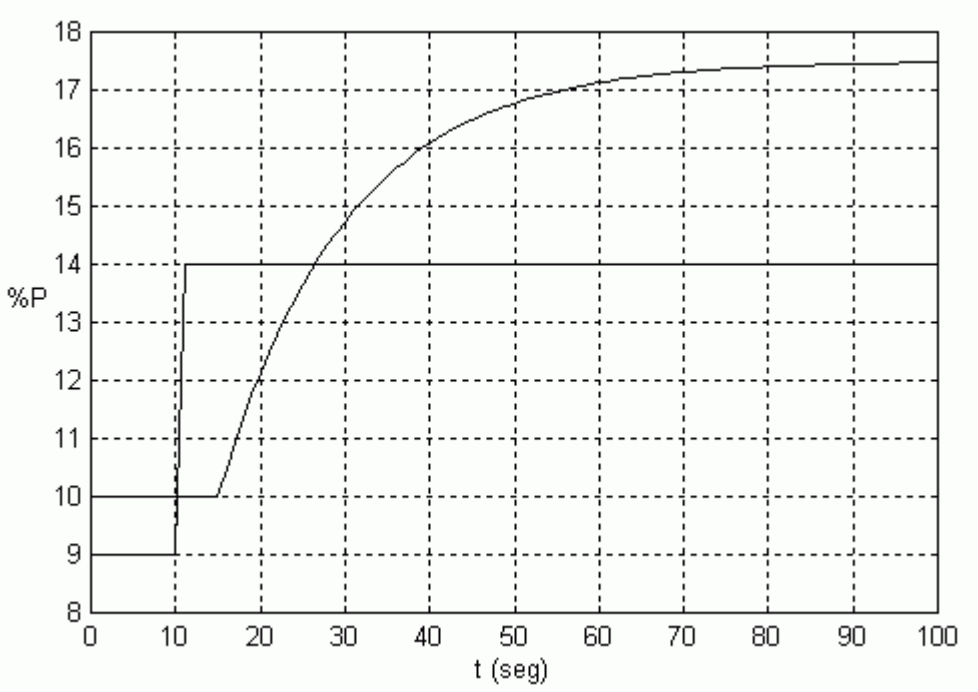


Figura 5.5 Respuesta del sistema para el ejemplo 5.1

a) Para aproximar el modelo a un sistema de primer orden con retardo (POR):

El 28.3% del cambio en la salida corresponde a: $10\% + 0.283 * 7.5\% = 12.12\%$

El 63.2% del cambio en la salida corresponde a: $10\% + 0.632 * 7.5\% = 14.74\%$

Con los valores anteriores se obtiene (ver figura 5.5):

Tiempo para alcanzar el 28.3% del cambio total: $t_1 = 9\ s$.

Tiempo para alcanzar el 63.2% del cambio total: $t_2 = 19\ s$.

Utilizando las ecuaciones 5.2 y 5.3 resulta:

$$\theta' + \frac{\tau}{3} = 9$$

$$\theta' + \tau = 19$$

Es decir: $\tau = 15\ s$ y $\theta' = 4\ s$.

La ganancia del sistema se estima con la ecuación 5.4:

$$K = \frac{\Delta \mathrm{Y}}{\Delta \mathrm{U}} = \frac{7.5\%}{5\%} = 1.5$$

Entonces, el modelo POR para el sistema es:

$$G_p(S) = \frac{Ke^{-\theta' S}}{\tau S + 1} = \frac{1.5e^{-4S}}{15S + 1}$$

b) Para aproximar el modelo a un sistema de segundo orden con retardo (SOR):

El 15% del cambio total en la salida corresponde a: $10\% + 0.15 * 7.5\% = 11.12\%$

El 45% del cambio total en la salida corresponde a: $10\% + 0.45 * 7.5\% = 13.37\%$

El 75% del cambio total en la salida corresponde a: $10\% + 0.75 * 7.5\% = 15.62\%$

Con los valores anteriores se obtiene (ver figura 5.5):

Tiempo para alcanzar el 15% del cambio total: $t_1 = 6.7\ s$.

Tiempo para alcanzar el 45% del cambio total: $t_2 = 14.3\ s$.

Tiempo para alcanzar el 75% del cambio total: $t_2 = 24.9\ s$.

Utilizando las ecuaciones 5.7 a 5.12 se obtiene:

$$x = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} = \frac{14.3 - 6.7}{24.9 - 6.7} = 0.417$$

$$\xi = \frac{0.0805 - 5.547(0.475 - 0.417)^2}{0.417 - 0.356} = 1.013$$

$$F_2(\xi) = 2.6 * 1.013 - 0.6 = 2.033$$

$$w_n = \frac{2.033}{24.9 - 6.7} = 0.1117$$

$$F_3(\xi) = 0.922(1.66)^{1.013} = 1.54$$

$$\theta' = 14.3 - \frac{1.54}{0.1117} = 0.513$$

Entonces el modelo SOR para el sistema es:

$$G_p(S) = \frac{1.5(0.1117)^2 e^{-0.513S}}{S^2 + 2(1.013)(0.1117)S + 0.1117^2}$$

$$G_p S) = \frac{0.01871e^{-0.513S}}{S^2 + 0.2263S + 0.01247} = \frac{1.5e^{-0.513S}}{(10.53S + 1)(7.63S + 1)}$$

La figura 5.6 muestra las respuestas de los modelos estimados POR y SOR ante una entrada en escalón similar a la aplicada al sistema bajo prueba. Se observa que los dos modelos reproducen con buena exactitud los datos del sistema original.

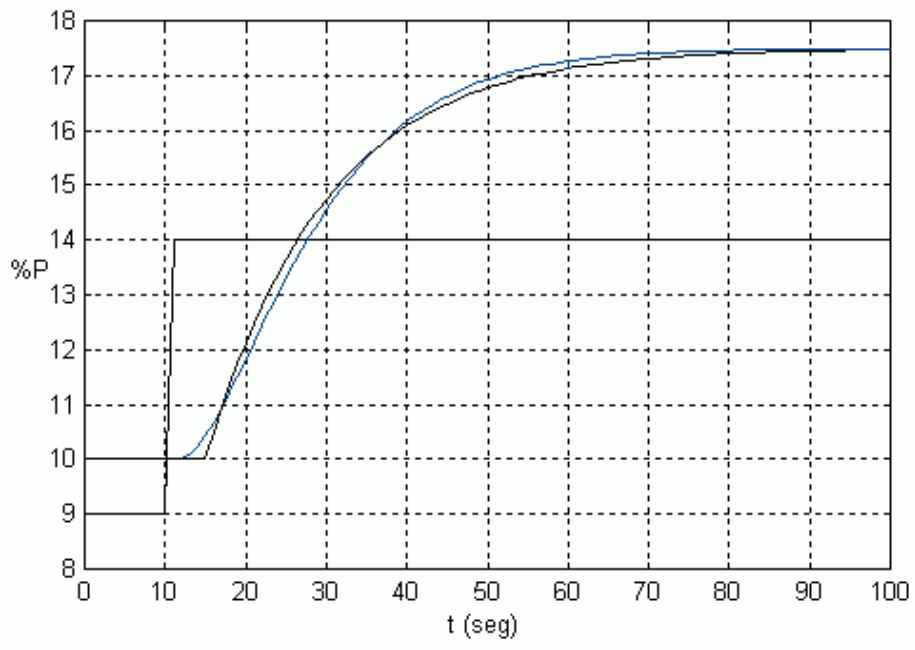


Figura 5.6 Respuesta de los modelos estimados

5.3.3 Modelo: planta puramente capacitiva. Un elemento capacitivo es aquel en donde se almacena masa ó energía. La capacitancia puede presentarse en diferentes formas pero sus propiedades son universales en cuanto al control automático se refiere.

Un sistema capacitivo típico es el de un tanque como el de la figura 5.7 en el cual, los flujos de entrada y de salida son independientes del nivel del líquido. Si se supone que en determinado momento el sistema está en equilibrio $(flujo\ de\ entrada = flujo\ de\ salida)$ y se aplica un cambio en escalón a cualquiera de los flujos, el nivel empieza a cambiar a una velocidad constante (responde en forma de rampa), nunca alcanza un nuevo estado de equilibrio y el tanque se llena o se desocupa totalmente [5.3].

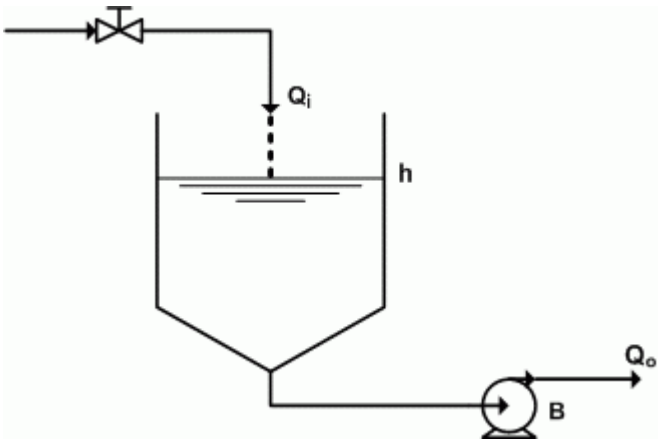


Figura 5.7 Sistema puramente capacitivo: Tanque con flujos de entrada y salida independientes del nivel

La función de transferencia de un sistema puramente capacitivo o integrador puro, se estima mediante un procedimiento similar al expuesto en la sección 5.3.1. La entrada al sistema es el escalón $u(t) = \Delta U$ y la salida es la rampa $y(t) = Bt$.
La figura 5.8a muestra la respuesta del integrador puro a una entrada en escalón y de ella se deduce qué:

Entrada: $u(t) = \Delta U$ es decir: $U(S) = \dfrac{\Delta U}{S}$

Salida: $y(t) = \left(\dfrac{\Delta Y}{\Delta t}\right) t$ es decir: $Y(S) = \dfrac{(\Delta Y/\Delta t)}{S^2}$

La función de transferencia es entonces:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{\frac{(\Delta Y/\Delta t)}{S^2}}{\frac{\Delta U}{S}} = \frac{\Delta Y/(\Delta U * \Delta t)}{S} \qquad 5.13$$

Haciendo $K = \Delta Y/(\Delta U * \Delta t)$ se obtiene:

$$G(S) = \frac{K}{S} \qquad 5.14$$

Si el sistema presenta retardo, éste se puede obtener directamente de la gráfica y, en este caso, la función de transferencia es:

$$G(S) = \frac{Ke^{-\theta' S}}{S} \qquad 5.15$$

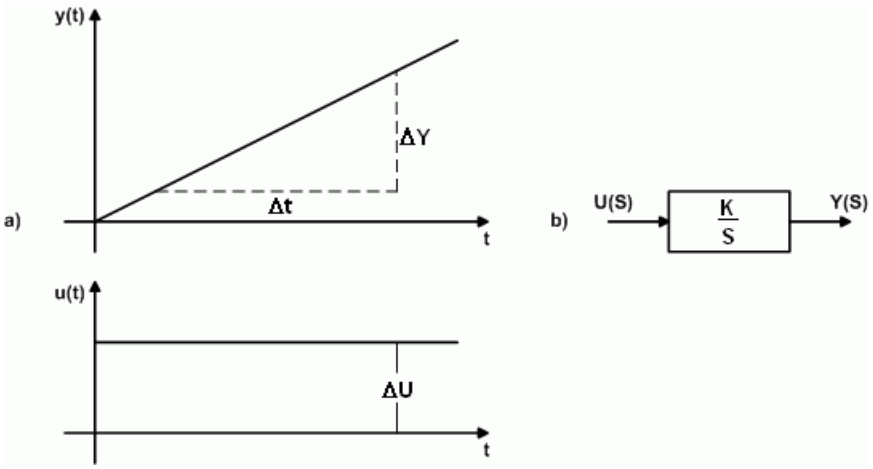


Figura 5.8 Sistema capacitivo puro: a) Respuesta al escalón b) Función de transferencia

5.3.4 Modelo: Planta de segundo orden (Lazo cerrado). La función de transferencia correspondiente a una planta de segundo orden se puede dar en la forma:

$$G(S) = \frac{w_n^2}{S(S + 2\xi w_n)} \qquad 5.16$$

Para un sistema de segundo orden como el de la figura 5.9, la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$G_w(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2} \qquad 5.17$$

En donde:

w_n = Frecuencia natural del sistema

ξ =Coeficiente de amortiguamiento.

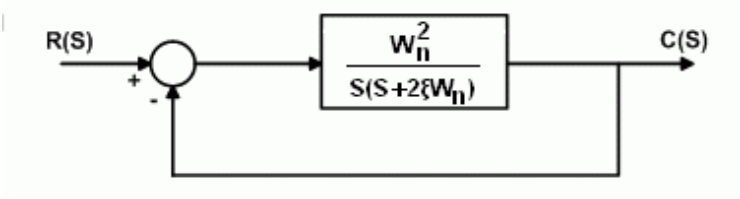


Figura 5.9 Sistema de segundo orden

El procedimiento experimental para estimar el modelo consiste en aplicar un escalón en la referencia con el sistema en lazo cerrado, habiendo eliminado previamente las acciones integral y derivativa del controlador, es decir, tomándolo como controlador proporcional. Se recomienda realizar varias veces la prueba y variar la ganancia del controlador hasta obtener una o varias curvas en las cuales el sistema se comporte como un sistema subamortiguado.

Al analizar las características de respuesta transitoria de un sistema de segundo orden a un entrada en escalón se deben tener en cuenta, para su identificación, los siguientes elementos: el tiempo de retardo (t_d), el tiempo de crecimiento (t_r), el tiempo de pico (t_p), el tiempo de establecimiento (t_S) y el máximo sobreimpulso (M_p).

En la figura 5.10 se definen tales elementos. Por lo general, el conocimiento de dos de ellos permite determinar el modelo del sistema. Las relaciones entre los elementos citados y los parámetros ω_n y ξ del sistema son:

$$t_d = \frac{1.1 + 0.125\xi + 0.46\xi^2}{w_n} \qquad 5.18$$

$$t_r = \frac{1 - 0.416\xi + 2.9\xi^2}{w_n} \qquad 5.19$$

$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad 5.20$$

$$t_S = \frac{4}{\xi w_n} \qquad 5.21$$

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \qquad 5.22$$

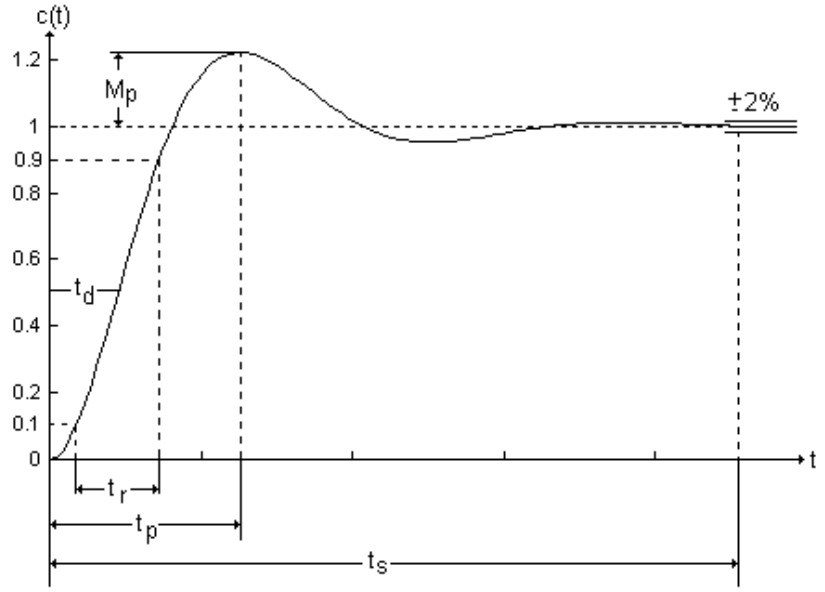


Figura 5.10 Respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado al escalón

De las gráficas de respuesta del sistema se pueden determinar los parámetros t_r, t_S, t_p, t_d y M_p y con las ecuaciones 5.18 a 5.22 se estiman los valores de ξ y w_n . La ganancia de la planta está dada por la ecuación 5.4.

Si al realizar la prueba, el controlador tiene ganancia (K_C) diferente de la unitaria, es necesario realizar correcciones en los valores de ξ y de w_n estimados así:

$$w_n = \frac{w_{nc}}{\sqrt{K_c}} \qquad \xi = \xi_c\sqrt{K_c} \qquad 5.23$$

Siendo w_{nc} y ξ_c los parámetros evaluados para el sistema con ganancia del controlador igual a K_c y w_n y ξ los parámetros reales de la planta.

5.4 IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA

Algunas técnicas de diseño de sistemas de control, incluyendo el método del lugar geométrico de las raíces y el de asignación de polos, requieren de un modelo paramétrico del sistema. Este tipo de modelo es particularmente importante en sistemas de control adaptativo, en los cuales, los parámetros de la planta deben ser estimados en línea para calcular el controlador correspondiente. Para dar una idea de la identificación paramétrica se consideran a continuación el método de mínimos cuadrados no recursivo y el método de mínimos cuadrados recursivos.

5.4.1 Identificación por el método de mínimos cuadrados no recursivo. Se asume que la función de transferencia de pulso del modelo es de la forma [5.4]:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_n} \qquad 5.24$$

En donde $U(z)$ es la entrada e $Y(z)$ es la salida.

El sistema dado por 5.24 queda descrito por la ecuación en diferencias:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \cdots - a_n y(k-n) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \cdots + b_n u(k-n) \qquad 5.25$$

Este modelo se conoce como "MODELO ARMAX" (Auto regressive moving average) y en él se debe estimar el vector de parámetros dado por:

$$\theta = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T \qquad 5.26$$

A partir de un conjunto de $N+1$ pares de mediciones de entrada–salida del sistema:

$$\{u(0), y(0)\} \quad \{u(1), y(1)\} \quad \{u(2), y(2)\} \quad \cdots \quad \{u(n), y(n)\} \qquad 5.27$$

Debido al error que se puede introducir en la medición, la ecuación 5.25 se puede escribir en la forma:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \cdots - a_n y(k-n) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \cdots + b_n u(k-n) + e(k) \qquad 5.28$$

El primer error es función solamente de las mediciones conocidas. Entonces, para periodos de muestreo n, $n+1$, $\cdots N$, se tendrá:

$$y(n) = f^T(n)\theta + e(n)$$
$$y(n+1) = f^T(n+1)\theta + e(n+1) \qquad 5.29$$

. . . . . .

$$y(N) = f^T(N)\theta + e(N)$$

En donde θ es el vector de parámetros definido en la ecuación 5.26 y:

$$f^T(k) = [-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad \cdots \quad -y(k-n) \quad u(k-1) \quad u(k-2) \quad \cdots \quad u(k-n)] \qquad 5.30$$

Para facilitar el tratamiento matemático, se definen las siguientes ecuaciones:

$$Y(N) = [y(n) \quad y(n+1) \quad \cdots \quad y(N)]^T = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$$

$$F(N) = [f^T(n) \quad f^T(n+1) \quad \cdots \quad f^T(N)]^T = \begin{bmatrix} f^T(n) \\ f^T(n+1) \\ \vdots \\ f^T(N) \end{bmatrix} \qquad 5.31$$

$$\epsilon(N) = [e(n) \quad e(n+1) \quad \cdots \quad e(N)]^T = \begin{bmatrix} e(n) \\ e(n+1) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}$$

$$\theta = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T$$

Así, las ecuaciones dadas en 5.29 se pueden escribir en forma matricial cómo:

$$Y(N) = F(N)\theta + \epsilon(N) \qquad 5.32$$

En donde:

$Y(N)$ es de orden $(N - n + 1) \times 1$.

$F(N)$ es de orden $(N - n + 1) \times 2n$

$\epsilon(N)$ es de orden $(N - n + 1)$x1

θ es de orden $2n \times 1$

Al utilizar el método de mínimos cuadrados para estimar $Y(N)$, el vector θ debe ser tal que minimice la suma de los cuadrados del error, es decir, que minimice la función:

$$J(\theta) = \sum_{k=n}^{N} \epsilon^2(k) = \epsilon^T(k)\epsilon(k) \qquad 5.33$$

Si se despeja $\epsilon(N)$ de la ecuación 5.32 y se reemplaza en la ecuación 5.33 se obtiene:

$$j(\theta) = [Y(N) - F(N)\theta]^T[Y(N) - F(N)\theta] \quad 5.34$$

$$J(\theta) = Y^T(N)Y(N) - Y^T(N)F(N)\theta - \theta^T F^T(N)Y(N) + \theta^T F^T(N)F(N)\theta$$

$$J(\theta) = Y^T(N)Y(N) - 2\theta^T F^T(N)Y(N) + \theta^T F^T(N)F(N)\theta \quad 5.35$$

El valor de θ que minimiza a $J(\theta)$ debe cumplir con la ecuación:

$$\frac{\partial[J(\theta)]}{\partial\theta} = -2F^T(N)Y(N) + 2F^T(N)F(N)\theta = 0$$

Por lo tanto, el valor estimado de θ es:

$$\theta = [F^T(N)F(N)]^{-1}[F^T(N)Y(N)] \quad 5.36$$

EJEMPLO 5.2

Los datos que se dan a continuación corresponden a la respuesta de un sistema de control ante una entrada en escalón unitario. Obtener, a partir de ellos, un modelo de segundo orden que describa la dinámica del sistema.

k	0	1	2	3	4	5
$u(k)$	0	1	1	1	1	1
$y(k)$	0.00	0.73	1.26	1.55	1.73	1.84

SOLUCIÓN: El modelo pedido es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

El vector de parámetros a estimar es: $\theta = [a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2]$

Para ello se utiliza la ecuación: $\theta = [F^T(N)F(N)]^{-1}[F^T(N)Y(N)]$

El número de pares de medidas es $N + 1 = 6$, entonces:

Orden de $F(N)$: $(N - n + 1)$x$2n = 4$x4

Orden de $Y(N)$: $(N - n + 1)$x$1 = 4$x1

$$F(N) = \begin{bmatrix} -y(1) & -y(0) & u(1) & u(0) \\ -y(2) & -y(1) & u(2) & u(1) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) & u(2) \\ -y(4) & -y(3) & u(4) & u(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.73 & 0 & 1 & 0 \\ -1.26 & -0.73 & 1 & 1 \\ -1.55 & -1.26 & 1 & 1 \\ -1.73 & -1.55 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y(N) = [y(2) \quad y(3) \quad y(4) \quad y(5)]^T = [1.26 \quad 1.55 \quad 1.73 \quad 1.84]^T$$

$$F^T(N)F(N) = \begin{bmatrix} 7.5159 & 5.5543 & -5.27 & -4.54 \\ 5.5543 & 4.5230 & -3.54 & -3.54 \\ -5.270 & -3.5400 & 4.00 & 3.00 \\ -4.540 & -3.540 & 3.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$[F^T(N)F(N)]^{-1} = \begin{bmatrix} 8124.4 & -4630.7 & 5930.8 & 899.8 \\ -4630.7 & 2642.3 & -3380.4 & -509.5 \\ 5930.8 & -3380.4 & 4330.5 & 655.9 \\ 899.8 & -509.5 & 655.9 & 105.0 \end{bmatrix}$$

$$[F^T(N)Y(N)] = \begin{bmatrix} -0.73 & -1.26 & -1.55 & -1.73 \\ 0 & -0.73 & -1.26 & -1.55 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.26 \\ 1.55 \\ 1.73 \\ 1.84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.7375 \\ -6.1633 \\ 6.3800 \\ 5.1200 \end{bmatrix}$$

Con los resultados anteriores se obtiene:

$$\theta = \begin{bmatrix} 8124.4 & -4630.7 & 5930.8 & 899.8 \\ -4630.7 & 2642.3 & -3380.4 & -509.5 \\ 5930.8 & -3380.4 & 4330.5 & 655.9 \\ 899.8 & -509.5 & 655.9 & 105.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.7375 \\ -6.1633 \\ 6.3800 \\ 5.1200 \end{bmatrix}$$

$$\theta = [-0.5398 \quad -0.0442 \quad 0.8659 \quad -0.0284]$$

El modelo estimado es, entonces:

$$G(z) = \frac{0.8659z - 0.0284}{z^2 - 0.5398z - 0.0442}$$

A continuación se presenta un programa en MATLAB que permite realizar la identificación de un sistema utilizando el método de mínimos cuadrados no recursivo.

```
% Programa para Identificación no paramétrica
clc
u=input('entre el vector de entrada u= ');
y=input('entre los datos de salida y= ');
n=input('entre el orden del sistema n= ');
% u=u+0.09*rand(1,length(y));     % Utilizar cuando n>2
N=length(u);        % Número de datos
```

```
f=N-n;                % Orden de filas
c=2*n;                % Orden de columnas
s=0;
d=n;
t=n;
for i=0:n-1           % Calculo de la matriz F(N)
   s=s+1;
   t=d;
   for k=1:f
      y1=-y(t);
      u1=u(t);
      t=t+1;
      u2(s,k)=u1;
      y2(s,k)=y1;
   end
   uf=u2';
   yf=y2';
   d=d-1;          % Decrementar una posición para crear una fila
end
uf
yf
F=[yf uf];          % Matriz F(N)
FT=F';
A=FT*F;
B=inv(A);
k=0;
for i=1:f           % Calculo del vector Y(N)
   k=k+1;
   y3(k)=[y(k+2)];
end
```

```
YN=y3';
C=FT*YN;
th=B*C          % Calculo del vector de parámetros
for p=1:n
   num1=th(p+n);
   num2(p)=num1;
   den1=th(p);
   den2(p)=den1;
end
num=num2
den=[1 den2]
printsys(num,den,'z')      % Modelo del sistema
j=0:N-1;
r=u;
y4=filter(num,den,r);
plot(j,y4)
y5=[y' y4'];
hold
plot(j,y,'*')
grid
```

En la tabla adjunta se comparan los valores de la salida real del sistema y los correspondientes a la salida estimada para diferentes instantes de muestreo. Los datos se obtuvieron con el programa propuesto.

k	0	1	2	3	4	5
$y(k)$	0.00	0.73	1.26	1.55	1.73	1.84
$y(est)$	0.00	0.86	1.30	1.58	1.74	1.85

La figura 5.11 corresponde a una representación gráfica de los datos reales y de los datos estimados, éstos últimos se dan como una función en línea continua.

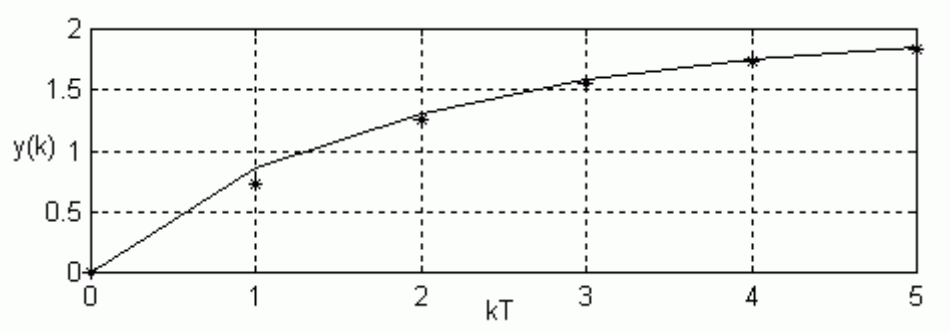


Figura 5.11 Respuesta del modelo estimado a la señal de entrada u(k)

5.4.2 Identificación por el método de mínimos cuadrados recursivos: En el método no recursivo, el vector de parámetros θ se calcula utilizando toda la información disponible, siendo esta pequeña en los primeros instantes, pero aumenta a medida que transcurre el tiempo, lo que genera un alto costo computacional al procesar la información. En el método recursivo el vector de parámetros se calcula a partir de los resultados obtenidos en el instante anterior $(n-1)$ y de los datos de entrada y salida actuales (instante N).

Si la función de costo $J(\theta)$ dada en la ecuación 5.33 se asume de modo que los datos más recientes tengan mayor peso, es decir se hace:

$$J(\theta) = \sum_{k=n}^{N} w(k)\epsilon^2(k) = \epsilon^T(N)w(N)\epsilon(N) \qquad 5.37$$

En donde $w(N)$ es una matriz diagonal, La ecuación 5.36 se transforma en:

$$\theta = [F^T(N)w(N)F(N)]^{-1}[F^T(N)w(N)Y(N)] \qquad 5.38$$

El factor de peso $w(k)$ puede tomar la forma:

$$w(k) = a\lambda^{N+1-k} \qquad \lambda \leq 1 \qquad 5.39$$

Si a se selecciona de modo que $a = 1-\lambda$, el factor de peso se denomina "exponencial". Para λ pequeño comparado con la unidad, predominan los datos más recientes en la estimación, a medida que λ se aproxima a la unidad, los datos más antiguos empiezan a tener mayor influencia en la estimación. Si $a = \lambda = 1$, se obtiene el algoritmo de mínimos cuadrados no recursivo dado en la ecuación 5.36 [5.5].

De las ecuaciones 5.29 y 5.30 se obtiene:

$$y(k) = f^T(k)\theta + \epsilon(k)$$

$$y(k) = [-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad \cdots \quad u(k-1) \quad u(k-2) \quad \cdots]\theta + \epsilon(k) \quad 5.40$$

De la ecuación 5.31 se obtiene:

$$F^T(N) = [f(n) \quad f(n+1) \quad \cdots \quad f(N) \quad f(N+1)] \quad 5.41$$

Se asume que el factor de peso es de la forma:

$$w(k) = a\lambda^{N+1-k} \qquad \lambda \leq 1 \quad 5.42$$

El primer factor de la ecuación 5.38 se puede escribir como:

$$F^T(N+1)w(N+1)F(N+1) = \sum_{k=n}^{N+1} f(k)a\lambda^{N+1-k}f^T(k)$$

$$F^T(N+1)w(N+1)F(N+1) = \sum_{k=n}^{N} f(k)a\lambda\lambda^{N-k}f^T(k) + f(N+1)af^T(N+1)$$

$$F^T(N+1)w(N+1)F(N+1) = \lambda F^T(N)w(N)F(N) + f(N+1)af^T(N+1) \quad 5.43$$

Si se define ahora una matriz cuadrada $P(k)$ de orden $2n \times 2n$ como:

$$P(k) = [F^T(k)w(k)F(k)]^{-1} \quad 5.44$$

La ecuación 5.43 se transforma en:

$$P^{-1}(N+1) = \lambda P^{-1}(N) + f(N+1)af^T(N+1) \quad 5.45$$

En la inversión de matrices se cumple que:

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1} \quad 5.46$$

Haciendo en la ecuación 5.45 las siguientes asignaciones:

$$A = \lambda P^{-1}(N) \qquad B = f(N+1) \qquad C = a \qquad D = f^T(N+1)$$

Se obtiene [5.6]:

$$P(N+1) = \frac{1}{\lambda}P(N)$$

$$-\frac{1}{\lambda}P(N)f(N+1)\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{\lambda}f^T(N+1)P(N)f(N+1)\right]^{-1} f^T(N+1)\frac{1}{\lambda}P(N) \quad 5.47$$

Teniendo en cuenta que $w(N)$ es una matriz diagonal, el segundo factor de la ecuación 5.38 se puede reescribir en la siguiente forma:

$$F^T(N)w(N)Y(N) = [f(n) \quad f(n+1) \quad \cdots \quad f(N+1)]\begin{bmatrix} a\lambda^{N+1-n} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & a\lambda & \\ \cdots & \cdots & & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(n) \\ \vdots \\ y(N) \\ y(N+1) \end{bmatrix}$$

$$F^T(N)w(N)Y(N) = \lambda F^T(N)w(N)Y(N) + f(N+1)ay(N+1) \qquad 5.48$$

Reemplazando las ecuaciones 5.44, 5.47 y 5.48 en la ecuación 5.38, se obtiene, después de simplificar:

$$P(N) = [F^T(N)w(N)F(N)]^{-1} \qquad 5.49$$

$$L(N+1) = \frac{1}{\lambda}P(N)f(N+1)\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{\lambda}f^T(N+1)P(N)f(N+1)\right]^{-1} \qquad 5.50$$

$$\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + L(N+1)\left[y(n+1) - f^T(N+1)\hat{\theta}(N)\right] \qquad 5.51$$

$$P(N+1) = \frac{1}{\lambda}[I - L(N+1)f^T(N+1)]P(N) \qquad 5.52$$

Las ecuaciones 5.49 a 5.52 se aplican para $N \geq n$.

Al reemplazar N por k se obtienen las ecuaciones en diferencias recursivas que dan la solución al problema de identificación con mínimos cuadrados recursivos.

La identificación debe comenzar asignando ciertas condiciones iniciales a $\hat{\theta}(N)$ y $P(N)$. Para este propósito se tienen dos posibilidades:

- Tomar una serie de datos con $N \geq 2n$ datos, obtener los valores de $P(N), \hat{\theta}(N)$ y $L(N+1)$ y utilizar a continuación estos valores para calcular $\theta(N+1)$ y $P(N+1)$.
- Hacer $\hat{\theta}(N) = 0$ y $P(N) = \alpha I$. En donde α es un escalar de valor elevado $(1000 \leq \alpha \leq 10000)$, luego obtener los valores estimados para $\theta(N+1)$ y $P(N+1)$.

En caso de elegir la segunda opción, el procedimiento completo es el siguiente:

- Seleccionar $\theta(k) = 0$ y $P(k) = \alpha I$. $\quad 1000 \leq \alpha \leq 10000 \quad w(n) = 1$
- Obtener los nuevos valores de $y(k+1)$ y $u(k+1)$
- Calcular el error:

$$e(k+1) = y(k+1) - f^T(k+1)\theta(k)$$

- Calcular $L(k+1)$ mediante la ecuación:

$$L(k+1) = \frac{aP(k)f(k+1)}{\lambda + af^T(k+1)P(k)f(k+1)}$$

- Calcular los nuevos parámetros estimados:

$$\theta(k+1) = \theta(k) + L(k+1)e(k+1)$$

- Actualizar la matriz de covarianza:

$$P(k+1) = [I - L(k+1)f^T(k+1)P(k)]$$

- Actualizar el vector de medidas: $f(k+2)$
- Hacer $k = k+1$ y regresar al paso 2.

EJEMPLO 5.3

Los datos que se dan a continuación corresponden a la respuesta de un sistema de control a un escalón unitario. Obtener a partir de ellos, un modelo de segundo orden que describa la dinámica del sistema. Asumir $a = \lambda = 1$ y utilizar mínimos cuadrados recursivos.

K	0	1	2	3	4	5	6
$u(k)$	0	1	1	1	1	1	1
$y(k)$	0.0	0.73	1.26	1.55	1.73	1.84	1.91

SOLUCIÓN: el modelo pedido es:

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

El vector a estimar es: $\theta = [a_1 \;\; a_2 \;\; b_1 \;\; b_2]^T$

Orden de P(k): $2n \times 2n = 4 \times 4$

El orden de $f^T(k)$ es: $1 \times 2n = 1 \times 4$

1. Se toma: $\theta(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ y $P(0) = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$

2. Nuevos valores de $y(k)$ y de $u(k)$: $y(1) = 0.73 \qquad u(1) = 1$

$$f^T(1) = [-y(1) \;\; -y(0) \;\; u(1) \;\; u(0)] = [-0.73 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

3. Calcular el error: $e(k+1)$

$$e(1) = y(1) - f^T(1)\theta(0) = 0.73$$

4. Calcular $L(k+1)$:

$$L(1) = \frac{P(0)f(1)}{1 + f^T(1)P(0)f(1)} = \begin{bmatrix} -0.4759 \\ 0 \\ 0.6519 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Calcular los nuevos parámetros estimados $\theta(k+1)$

$$\theta(1) = \theta(0) + L(1)e(1) = \begin{bmatrix} -0.3474 \\ 0 \\ 0.4759 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Actualizar la matriz de covarianza:

$$P(1) = I - L(1)f^T(1)P(0) = \begin{bmatrix} -346.415 & 0 & 475.911 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 475.911 & 0 & -650.933 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Actualizar el vector de medidas: $f^T(2)$

$$f^T(2) = [-y(2) - y(1) \;\; u(2) \;\; u(1)] = [-1.26 \quad -0.73 \quad 1 \quad 1]$$

$$y(2) = 1.26 \quad u(2) = 1$$

$$e(2) = y(2) - f^T(2)\theta(1) = 0.3463$$

$$L(2) = \frac{P(1)f(2)}{1 + f^T(2)P(1)f(2)} = \begin{bmatrix} -0.3805 \\ 0.0003 \\ 0.5216 \\ -0.0004 \end{bmatrix}$$

$$\theta(2) = \theta(1) + L(2)e(2) = \begin{bmatrix} -0.4792 \\ 0.0001 \\ 0.6566 \\ -0.0001 \end{bmatrix}$$

$$P(2) = I - L(2)f^T(2)P(1) = \begin{bmatrix} 348.197 & -0.2778 & -475.889 & 0.3805 \\ -0.2778 & 1.0002 & 0.3808 & -0.0003 \\ -475.889 & 0.3808 & 653.281 & -0.5216 \\ 0.3805 & -0.0003 & -0.5216 & 1.0004 \end{bmatrix}$$

$$f^T(3) = [-y(3) \quad -y(2) \quad u(3) \quad u(2)] = [-1.55 \quad -1.26 \quad 1 \quad 1]$$

$$y(3) = 1.55 \qquad u(3) = 1$$

$$e(3) = y(3) - f^T(3)\theta(2) = 0.1509$$

$$L(3) = \frac{P(2)f(3)}{1 + f^T(3)P(2)f(3)} = \begin{bmatrix} -0.3424 \\ -0.0002 \\ 0.4689 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$\theta(3) = \theta(2) + L(3)e(3) = \begin{bmatrix} -0.5309 \\ 0.0001 \\ 0.7273 \\ -0.0002 \end{bmatrix}$$

$$P(3) = I - L(3)f^T(3)P(2) = \begin{bmatrix} -346.439 & -0.1538 & 475.835 & -0.0379 \\ -0.1538 & 0.9999 & 0.2106 & 0.0000 \\ 475.835 & 0.2106 & -650.681 & 0.0519 \\ -0.0379 & 0.0000 & 0.0519 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$f^T(4) = [-y(4) \quad -y(3) \quad u(4) \quad u(3)] = [-1.73 \quad -1.55 \quad 1 \quad 1]$$

$$y(4) = 1.73 \qquad u(4) = 1$$

$$e(4) = y(4) - f^T(4)\theta(3) = 0.0845$$

$$L(4) = \frac{P(3)f(4)}{1 + f^T(4)P(3)f(4)} = \begin{bmatrix} -0.3229 \\ 0.0003 \\ 0.4426 \\ -0.0003 \end{bmatrix}$$

$$\theta(4) = \theta(3) + L(4)e(4) = \begin{bmatrix} -0.5582 \\ 0.0001 \\ 0.7647 \\ -0.0002 \end{bmatrix}$$

$$P(4) = I - L(4)f^T(4)P(3) = \begin{bmatrix} 348.196 & -0.3465 & -475.945 & 0.3608 \\ -0.3465 & 1.0003 & 0.4750 & -0.0004 \\ -475.945 & 0.4750 & 653.438 & -0.4945 \\ 0.3608 & -0.0004 & -0.4945 & 1.0004 \end{bmatrix}$$

$$f^T(5) = [-y(5) \quad -y(4) \quad u(5) \quad u(4)] = [-1.84 \quad -1.73 \quad 1 \quad 1]$$

$$y(5) = 1.84 \qquad u(5) = 1$$

$$e(5) = y(5) - f^T(5)\theta(4) = 0.0486$$

$$L(5) = \frac{P(4)f(5)}{1 + f^T(5)P(4)f(5)} = \begin{bmatrix} -3114 \\ -00002 \\ 0.4265 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$\theta(5) = \theta(4) + L(5)e(5) = \begin{bmatrix} -0.5733 \\ 0.0001 \\ 0.7855 \\ -0.0002 \end{bmatrix}$$

$$P(5) = I - L(5)f^T(5)P(4) = \begin{bmatrix} -346.433 & -0.1926 & 475.795 & -0.0490 \\ -0.1926 & 0.9999 & 0.2637 & 0.0000 \\ 475.795 & 0.2637 & -650.582 & 0.0671 \\ -0.0490 & 0.0000 & 0.0671 & 4.0000 \end{bmatrix}$$

$$f^T(6) = [-y(6) \quad -y(5) \quad u(6) \quad u(5)] = [-1.91 \quad -1.84 \quad 1 \quad 1]$$

$$y(6) = 1.91 \qquad u(6) = 1$$

$$e(6) = y(6) - f^T(6)\theta(5) = 0.0299$$

$$L(6) = \frac{P(5)f(6)}{1 + f^T(6)P(5)f(6)} = \begin{bmatrix} -0.3052 \\ 0.0003 \\ 0.4183 \\ -0.0003 \end{bmatrix}$$

$$\theta(6) = \theta(5) + L(6)e(6) = \begin{bmatrix} -0.5824 \\ 0.0001 \\ 0.7980 \\ -0.0002 \end{bmatrix}$$

El modelo del sistema es:

$$G(z) = \frac{0.798z - 0.0002}{z^2 - 0.5824z + 0.0001}$$

A continuación se presenta una comparación entre los valores de la salida real del sistema y los de la salida estimada para diferentes instantes de muestreo.

k	0	1	2	3	4	5	6
$y(k)$	0.0	0.73	1.26	1.55	1.73	1.84	1.91
$y(est)$	0.0	0.801	1.265	1.552	1.731	1.841	1.91

La figura 5.12 corresponde a una representación gráfica de los datos reales y de los estimados, éstos últimos se presentan como una función en línea continua. Obsérvese la correspondencia entre los valores reales y los valores estimados.

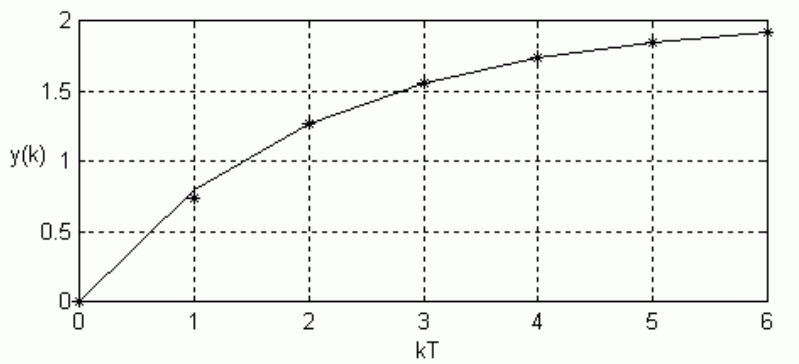


Figura 5.12 Respuesta del modelo estimado a la señal de entrada u(k)

Programa en Matlab para identificación recursiva con modelo de segundo orden.

```
clc
u=[0 1 1 1 1 1 1];
y=[0 0.73 1.26 1.55 1.73 1.84 1.91];
n=input('entre el orden del sistema n=');
p=1000*eye(2*n);
th=[zeros(1,2*n)]';
for k=1:length(y)-1
    phit=[-y(k+1) -y(k) u(k+1) u(k)];
    e=y(k+1)-phit*th
    l=p*phit'/(1+phit*p*phit');
    th=th+l*e;
    p=eye(2*n)-l*phit*p;
end
u1=[1 1 1 1 1 1 1];
n=[th(3) th(4)];
d=[1 th(1) th(2)];
y1=dlsim(n,d,u1)
plot(y1)
hold
plot(y,'*')
grid
```

PROBLEMAS PROPUESTOS

5.1 Las gráficas que se dan en la figura 5.13 corresponden a las respuestas, en lazo abierto, de diferentes procesos a una entrada en escalón. Obtenga sus modelos matemáticos correspondientes aproximándolos a un sistema de primer orden con retardo (POR) y a un sistema de segundo orden con retardo (SOR).

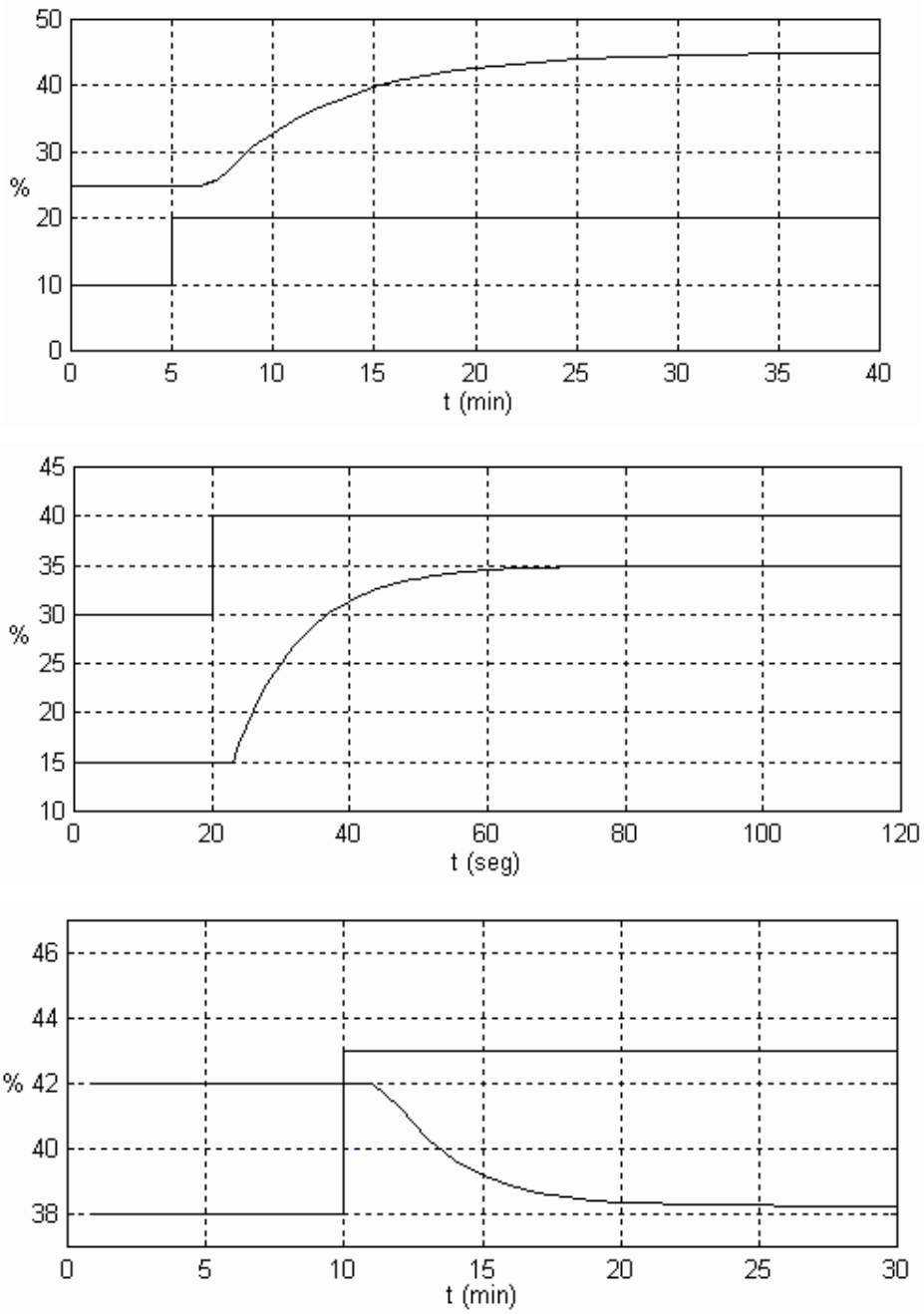


Figura 5.13 Respuesta de los procesos para el problema 5.1

5.2 Las gráficas que se dan en la figura 5.14 corresponden a la respuesta, en lazo cerrado, de diferentes procesos. Para obtenerlas se suprimieron en el controlador la acción integral y la acción derivativa. Se ajustó la ganancia con $K_C = 1$ y se le aplicó un cambio en escalón al set-point. Calcular en cada caso el modelo matemático del sistema.

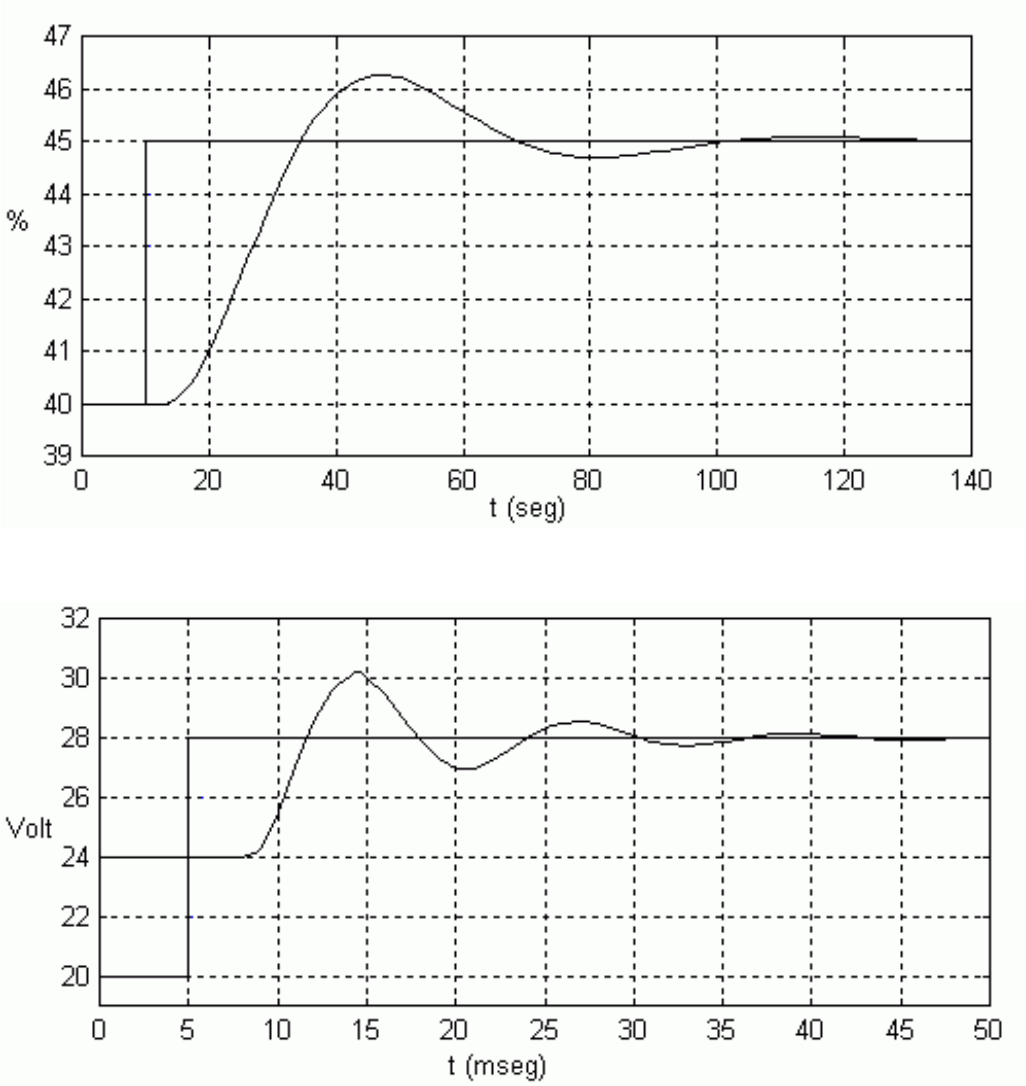


Figura 5.14 Gráficas para los problemas 5.2 y 5.3

5.3 Resolver el problema anterior asumiendo que el controlador se ajustó con ganancias de: a) $K_C = 1.69$. b) $K_C = 4$. c) $K_C = 0.64$

5.4 Los datos que se dan a continuación corresponden a la respuesta en grados centígrados de la temperatura del agua de un intercambiador de calor al variar la apertura de la válvula de control del flujo de vapor del 30% al 40%. La temperatura se midió con un termómetro calibrado de 0 ºC a 100 ºC. Utilice el método de mínimos cuadrados no recursivos y obtenga el modelo matemático del intercambiador. Aproxime el modelo a un sistema de segundo orden.

$t\ (seg)$	0	30	60	90	120	150	180
$\%\ Ap\ Válv$	30	40	40	40	40	40	40
$Temp\ (ºC)$	20.0	45.9	56.9	61.5	63.5	64.4	64.6

5.5 Resolver el problema 5.4 aproximando el modelo del intercambiador a un sistema de primer orden. Utilice mínimos cuadrados no recursivos.

5.6 Los datos que se dan a continuación corresponden a la respuesta en PSI, del cambio de presión en un tanque al variar la apertura de la válvula de suministro de aire del 45% al 55%. Utilice el método de mínimos cuadrados recursivos y obtenga un modelo de segundo orden que describa adecuadamente la dinámica del tanque. La presión del tanque se mide con un manómetro calibrado de 0 a 15 PSI.

$t\ (min)$	0	2	4	6	8	10	12
$\%\ Ap\ Válv.$	45	55	55	55	55	55	55
$P\ (PSI)$	4.0	7.30	8.78	9.45	9.75	9.89	9.95

5.7 Cierta planta se puede modelar como un sistema de primer orden con función de transferencia de pulso dada por:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.3625}{z - 0.8187} \qquad T = 0.1\ s.$$

a) Obtenga la salida $y(kT)$ del sistema cuando $u(t) = 1$. b) Con los datos obtenidos en la parte a y, utilizando el método de mínimos cuadrados recursivos,

aproxime el sistema aun modelo de segundo orden. c) Obtenga la salida $y(kT)$ del modelo obtenido con $u(t) = 1$ y compárela con la modelo original. Que conclusiones puede sacar?

5.8 Resuelva el problema 5.7 si la planta se modela con la función de transferencia de pulso dada por:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.185}{z(z - 0.9048)} \qquad T = 0.2\ s.$$

5.9 Cierto sistema se puede modelar mediante la ecuación en diferencias:

$$y(k) = y(k-1) - 0.16y(k-2) + 0.8u(K-1)$$

Calcular la salida $y(k)$ del sistema si la entrada $u(k)$ es: a) Un escalón unitario $u(k) = 1$. b) Una rampa $u(k) = k$. c) Una señal senoidal $u(k) = \sin(k\pi/10)$ $k = 0, 1, 2, 3$ ...d) Con los datos obtenidos en los literales anteriores y, suponiendo que el sistema se puede aproximar al modelo:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{z - a}$$

Estime, para cada señal de entrada, los parámetros a y b utilizando el método de mínimos cuadrados no recursivos. Que conclusiones se pueden obtener?

5.10 Para modelar la respuesta de la temperatura de una torre de destilación se implementó el sistema que se muestra en la figura 5.15a. Se utilizaron elementos continuos para la toma de datos y los resultados obtenidos se muestran en la figura 5.15b. a) Aproxime la dinámica de la torre a un modelo POR. b) Asuma $T = 20\ s$, discretice el modelo obtenido y determine a partir del mismo, la respuesta de la temperatura si se le aplica al sistema un cambio en escalón igual al utilizado en el procedimiento de identificación inicial. Qué conclusiones se pueden obtener con este experimento? c) Repita los pasos anteriores si la dinámica del sistema se aproxima a un modelo SOR.

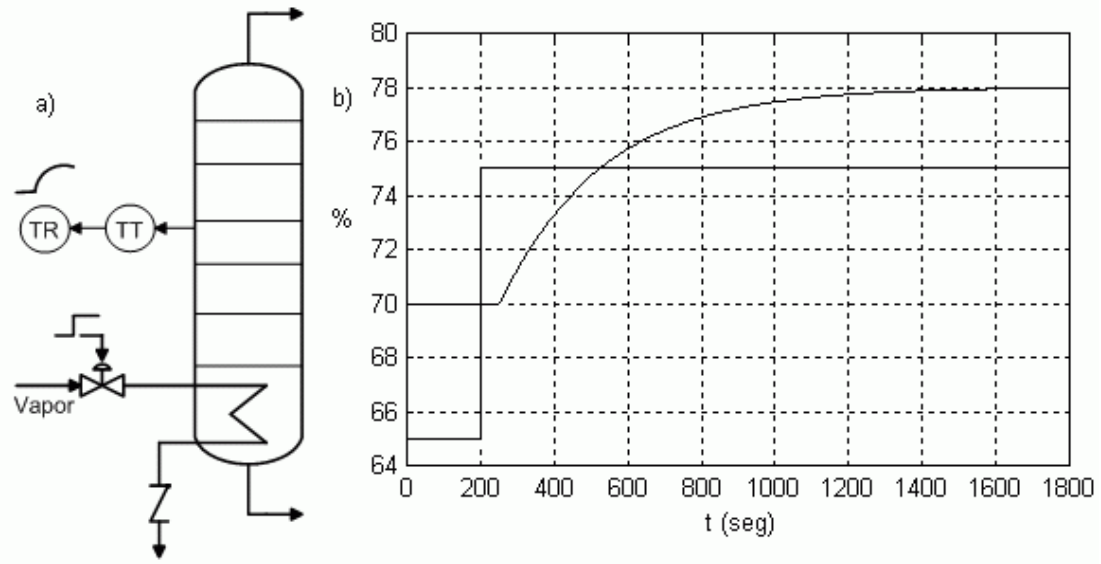


Figura 5.15 Sistema para el problema 5.10

5.11 Cierto sistema de primer orden se modela mediante la ecuación en diferencias:

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1)$$

En la tabla que se da a continuación se muestran los valores de la respuesta del sistema a un escalón.

k	0	1	2	3	4
$u(k)$	1	1	1	1	1
$y(k)$	0.0	1.0	1.5	1.75	1.85

a) Utilice el método de mínimos cuadrados no recursivos y obtenga el valor de los parámetros a y b. b) Resuelva el problema utilizando el método de mínimos cuadrados recursivos. c) Demuestre que para este sistema, el valor de la salida en el instante k está dada por:

$$y(k) = b(1 + a + a^2 + \cdots a^{k-1})$$

5.12 El tanque de la figura 5.16 tiene 0.4 m de radio y 1.6 m de altura. En $t = t_o$ el nivel del agua alcanza el 25% de su valor máximo, la bomba extrae un flujo

constante de agua de 100 l/min y la apertura de la válvula de entrada está calibrada para suministrar al tanque un flujo igual. Súbitamente el flujo de entrada se aumenta en un 10% y el nivel del agua en el tanque empieza a variar de acuerdo con la tabla adjunta. Con los datos dados obtenga la dinámica del sistema aproximándola al modelo apropiado.

$t\ (min)$	0	5	10	15	25	35	45	60
$h\ (m)$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9	1.1	1.3	1.6

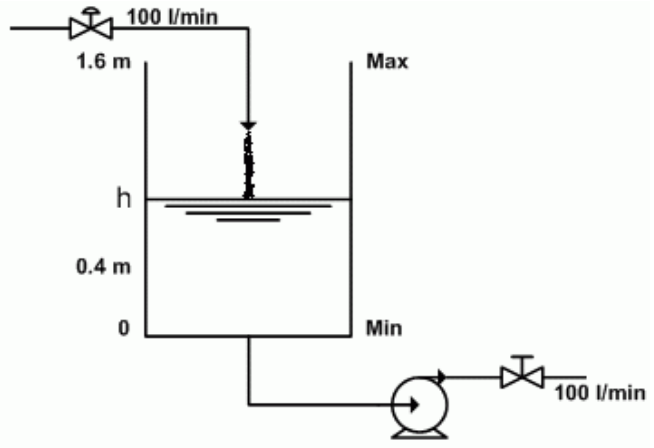


Figura 5.16 Tanque para el problema 5.12

REFERENCIAS

[5.1] Söderström, Torsten. *System Identification*. Prentice Hall. London. 1989

[5.2] Newell, Robert. *Aplied process control*. Prentice Hall. Englewood Cliffs. 1989

[5.3] Harriot, Peter. *Process control.* Mcgraw Hill. New Delhi. 1977

[5.4] Franklin, Gene. Powell David. *Digital control of dynamic systems*. Addison Wesley. Publishing Company. 1994

[5.5] Franklin, Gene. Powell David. *Digital control of dynamic systems*. Addison Wesley. Publishing Company. 1994

[5.6] Phillips, Charles. Nagle, Troy. *Digital control systems analysis and design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs. 1995

CAPITULO SEIS

ALGORITMOS DE CONTROL DIGITAL

Las técnicas de diseño de controladores convencionales basadas en el método del lugar geométrico de las raíces, el método de respuesta en frecuencia, el método de la curva de reacción propuesto por Ziegler-Nichols, etc., se pueden utilizar en el diseño de controladores digitales tomando como punto de partida el modelo continuo correspondiente a los controladores P, PI y PID y, aplicando a ellos técnicas de discretización utilizando la transformada z o trabajando con las ecuaciones en diferencias que los describen. Indudablemente, esta técnica de diseño es la más utilizada en la actualidad para los sistemas de control basados en computadores digitales o microprocesadores.

Otra alternativa consiste en diseñar los controladores digitales directamente en el dominio del tiempo discreto. En este caso, el proceso a controlar se discretiza previamente y el modelo obtenido se toma como base para diseñar el controlador deseado de modo que el proceso cumpla con las especificaciones de respuesta exigidas.

Los controladores análogos tienen limitaciones físicas debido a sus componentes de carácter neumático o electrónico. En el diseño de controladores digitales no es necesario tener en cuenta dichas limitantes y por esa razón un gran número de técnicas de control que no se pueden implementar con controladores análogos resultan posibles con los controladores digitales.

Ziegler y Nichols (1942) fueron los primeros en establecer un procedimiento sistematizado para la sintonía de los controladores, a partir de ese momento se ha desarrollado un gran número de métodos de ajuste, basados en diversos criterios de funcionamiento de los lazos de control. El desarrollo de los métodos de sintonía de controladores es un tema actual de investigación en todo el mundo, ya que diversos aspectos sobre su parametrizacion y sobre el comportamiento y la estabilidad de los lazos de control no están completamente resueltos.

Los procedimientos de sintonía de controladores requieren del conocimiento de la dinámica del proceso la cual se obtiene generalmente por medio de un modelo identificado mediante métodos experimentales. A partir del modelo estimado para el proceso, se determinan los valores requeridos para los parámetros del controlador. En adición a lo anterior, es necesario conocer también cual es la ecuación o función de transferencia del controlador que se desea sintonizar y cuáles son los parámetros necesarios para la sintonía del controlador empleado.

Los pasos requeridos para la puesta en servicio del lazo de control se pueden resumir así:

- Identificar el proceso a controlar (modelado).
- Establecer las características de comportamiento deseadas para el sistema de control realimentado (criterio de diseño).
- Seleccionar el método de sintonía de controlador.
- Calcular los parámetros del controlador.
- Analizar el comportamiento del lazo de control con el modelo (simulación).
- verificar la función de transferencia del controlador a sintonizar.
- ajustar el controlador (parametrizacion).
- verificar el comportamiento del controlador en el proceso real.

6.1 APROXIMACIÓN DISCRETA DE LOS MODOS DE CONTROL P, PI Y PID CONVENCIONALES.

6.1.1 Control Proporcional (P): Este tipo de controlador genera una salida que es proporcional al error actuante. En el control proporcional existe una relación lineal entre el valor de la variable controlada y la posición del elemento final de control. Es decir, la válvula se mueve la misma cantidad por cada unidad de desviación (error), entre el valor deseado o valor de referencia y el valor actual de la variable controlada.

La ecuación de un controlador proporcional continuo está dada por:

$$m(t) = K_c e(t) + M_0 \tag{6.1}$$

En donde:

$m(t) =$ Salida del controlador.

$e(t) =$ Señal de error actuante.

K_C =Ganancia del controlador. (Parámetro de ajuste).

$M_0 =$ Salida del controlador para error nulo.

La forma discreta de la ecuación 6.1 es:

$$m(k) = K_c e(k) + M_0 \tag{6.2}$$

La salida del controlador en el instante $(k-1)$ se puede dar como:

$$m(k-1) = K_c e(k-1) + M_0 \tag{6.3}$$

De las ecuaciones 6.2 y 6.3 se obtiene:

$$m(k) - m(k-1) = K_c[e(k) - e(k-1)]$$

$$m(k) = K_c e(k) - K_c e(k-1) + m(k-1) \tag{6.4}$$

La ecuación 6.4 representa el algoritmo de control digital para un controlador proporcional. Tomando la transformada z a la ecuación 6.4 se obtiene:

$$(1 - z^{-1})M(z) = K_c(1 - z^{-1})E(z)$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = q_o \tag{6.5}$$

En donde $q_o = K_c$

La ecuación 6.5 es la función de transferencia de pulso del controlador proporcional.

6.1.2 Control Proporcional más Integral (PI): En este tipo de controlador, la señal de salida experimenta un salto inicial proporcional al error actuante y a continuación presenta una variación gradual a una velocidad proporcional al error. La ecuación de un controlador proporcional más integral continuo está dada por:

$$m(t) = K_c\left[e(t) + \frac{1}{\tau_i}\int e(t)dt\right] + M_o \qquad 6.6$$

En donde:

$m(t) =$ Salida del controlador.

$e(t) =$ Señal de error actuante.

$K_c =$ Ganancia del controlador. (Parámetro de ajuste).

$\tau_i =$Tiempo Integral en min/repetición o repeticiones/min. (Parámetro de ajuste).

$M_o =$ Salida del controlador para error nulo.

Para tiempos de muestreo T pequeños, la ecuación 6.6 se puede llevar a una ecuación en diferencias por discretización, reemplazando la parte integral por una suma. La integración continua se puede aproximar utilizando integración rectangular o integración trapezoidal. Utilizando el método de integración trapezoidal (ver figura 6.1) se obtiene:

El área del trapecio es:

$$A = \left[\frac{e(k) + e(k-1)}{2}\right]T$$

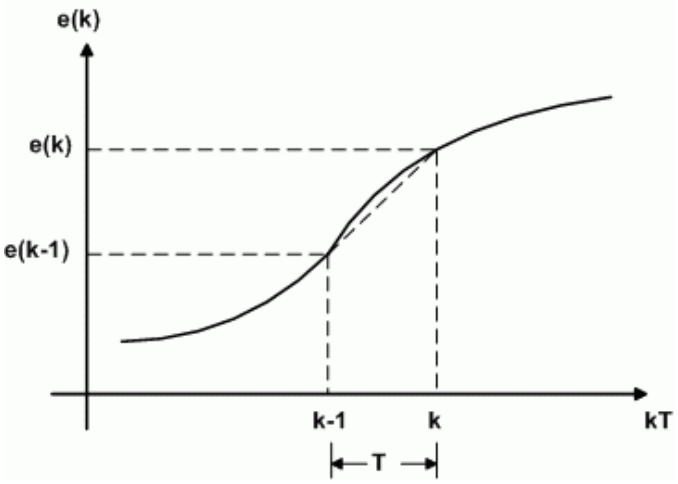


Figura 6.1 Método de integración trapezoidal

El área total bajo la curva del error es igual a la suma de las áreas de todos los trapecios en que se pueda subdividir dicha área, es decir:

$$\int e dt = \sum \left[\frac{e(k) + e(k-1)}{2} \right] T$$

Reemplazando esta última expresión en la ecuación 6.6 y tomando los valores de $m(t)$ y $e(t)$ en el instante de muestreo k se obtiene:

$$m(k) = K_c \left[e(k) + \frac{T}{2\tau_i} \sum [e(k) + e(k-1)] \right] \qquad 6.7$$

Así mismo, para el instante $(k-1)$ resulta que:

$$m(k-1) = K_c \left[e(k) + \frac{T}{2\tau_i} \sum [e(k-1) + e(k-2)] \right] \qquad 6.8$$

Restando la ecuación 6.8 de la ecuación 6.7 se llega a:

$$m(k) - m(k-1) = K_c \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T}{2\tau_i} \sum [e(k) - e(k-2)] \right]$$

Pero:

$$\sum [e(k) - e(k-2)] = e(k) + e(k-1)$$

Por lo tanto:

$$m(k) - m(k-1) = K_c \left[\left(1 + \frac{T}{2\tau_i} \right) e(k) - \left(1 - \frac{T}{2\tau_i} \right) e(k-1) \right]$$

Esta última ecuación se puede escribir como:

$$m(k) = q_o e(k) + q_1 e(k-1) + m(k-1) \qquad 6.9$$

En donde:

$$q_o = K_c \left[1 + \frac{T}{2\tau_i} \right] \qquad q_1 = -K_c \left[1 - \frac{T}{2\tau_i} \right] \qquad 6.10$$

La ecuación 6.9 es el algoritmo de control digital para el controlador PI.

Al tomar la transformada z a la ecuación 6.9 se obtiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_o + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{q_o z + q_1}{z - 1} \qquad 6.11$$

La ecuación 6.11 corresponde a la función de transferencia de pulso del controlador PI.

6.1.3 Control Proporcional más Integral más Derivativo (PID): Con frecuencia se añade otro modo de control al controlador PI, este nuevo modo de control es la acción derivativa y tiene como finalidad "anticipar hacia dónde va el proceso", mediante la observación de la rapidez en el cambio del error. La ecuación de un controlador PID continuo es:

$$m(t) = K_c\left[e(t) + \frac{1}{\tau_i}\int e(t)dt + \tau_d\frac{de(t)}{dt}\right] + M_o \qquad 6.12$$

$m(t) =$ Salida del controlador.

$e(t) =$ Señal de error actuante.

$K_c =$ Ganancia del controlador. (Parámetro de ajuste)

$\tau_i =$Tiempo integral en min/repetición o repeticiones/min. (Parámetro de ajuste).

$\tau_d =$Tiempo derivativo en min. (Parámetro de ajuste).

$M_o =$ Salida del controlador para error nulo.

El controlador PID tiene tres parámetros que se deben ajustar convenientemente según el proceso para un adecuado control del mismo.

Para tiempos de muestreo T pequeños, la ecuación 6.12 se puede llevar a una ecuación de diferencias por discretización, reemplazando la parte derivativa por una diferencia y la parte integral por una suma. Utilizando el método de integración trapezoidal y evaluando la diferencia $m(k) - m(k-1)$ se obtiene: [6.1]

$$m(k) = K_c\left[e(k) + \frac{T}{2\tau_i}\sum[e(k) + e(k-1)] + \frac{\tau_d}{T}[e(k) - e(k-1)]\right]$$

$$m(k-1) = K_c\left[e(k-1) + \frac{T}{2\tau_i}\sum[e(k-1) + e(k-2)] + \frac{\tau_d}{T}[e(k-1) - e(k-2)]\right]$$

$$m(k) - m(k-1) = K_c\left[e(k) - e(k-1) + \frac{T}{2\tau_i}\sum[e(k) - e(k-2)] + \frac{\tau_d}{T}[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]\right]$$

Entonces:

$$m(k) - m(k-1) = q_o e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \qquad 6.13$$

$$m(k) = q_o e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) - m(k-1) \qquad 6.14$$

La ecuación 6.14 es el algoritmo de control discreto para el controlador PID.

Tomando la transformada z a la ecuación 6.13 se obtiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_o + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{q_o z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)} \qquad 6.15$$

La ecuación 6.15 es la función de transferencia de pulso del controlador PID.

En las ecuaciones 6.14 y 6.15 los parámetros q_o, q_1 y q_2 se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$q_o = K_c\left[1 + \frac{T}{2\tau_i} + \frac{\tau_d}{T}\right] \qquad q_1 = -K_c\left[1 - \frac{T}{2\tau_i} + \frac{2\tau_d}{T}\right] \qquad q_2 = \frac{K_c\tau_d}{T} \qquad 6.16$$

6.2 AJUSTE DE LOS CONTROLADORES P, PI Y PID

En el lazo de control las acciones proporcional, integral y derivativa poseen características muy específicas que es necesario tener en cuenta al seleccionar y ajustar el controlador que ha de regular el proceso:

- La acción proporcional modifica la posición del elemento final de control en forma proporcional a la desviación de la variable controlada con respecto al set-point.
- La acción integral mueve al elemento final de control a una velocidad proporcional a la desviación de la variable controlada con respecto al set-point.
- La acción derivativa modifica la posición del elemento final de control en forma proporcional a la velocidad de cambio de desviación de la variable controlada con respecto al set-point.

Para el diseño de controladores digitales P, PI y PID se pueden utilizar las mismas técnicas que se aplican en el diseño de los controladores análogos.

6.2.1 Método de la Ganancia Limite: Para determinar los parámetros de ajuste del controlador utilizando este método se trabaja con el sistema en lazo cerrado es decir, con el controlador en automático y se procede experimentalmente así:

a) Eliminar las acciones integral y derivativa del controlador, es decir trabajar con el controlador como proporcional únicamente.

b) Con el controlador en automático, incrementar la ganancia hasta que el sistema empiece a oscilar con amplitud constante. Se anota el valor de la ganancia K_u con la cual se produce la oscilación. Esta ganancia se denomina ganancia última. Los incrementos de la ganancia deben ser cada vez menores a medida que ésta se aproxima a la ganancia última y deben ir acompañados de pequeños cambios en el set-point a uno y otro lado del punto de operación normal del proceso.
c) En la gráfica que se obtiene de la variable en el registrador se mide el período de oscilación, este es el período último T_u (ver figura 6.2).

La frecuencia de oscilación del sistema corresponde a la frecuencia a la cual el proceso en lazo abierto tiene un retraso de fase de $-180º$. Físicamente la ganancia K_u corresponde a la ganancia que lleva al sistema a estabilidad crítica y se puede estimar a partir del margen de ganancia del sistema en lazo abierto.

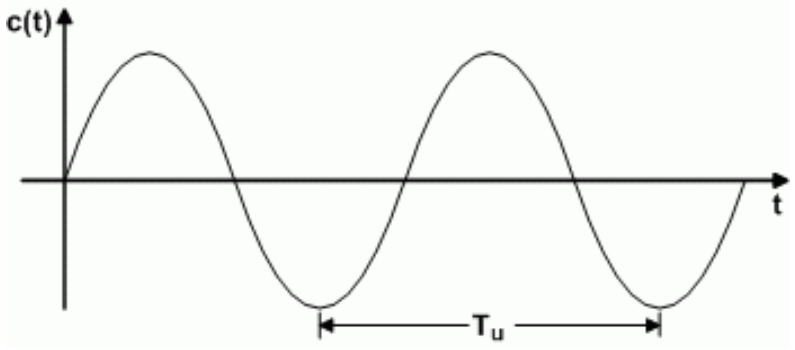


Figura 6.2 Respuesta del sistema cuando la ganancia del controlador es igual a la ganancia última K_u y el período último es T_u

Una vez estimados la ganancia última (K_u) y el periodo último (T_u), se utiliza la tabla 6.1 para calcular los parámetros de ajuste del controlador con los cuales se produce la razón de asentamiento de un cuarto [6.2].

Durante el experimento diseñado para el cálculo de K_u y de T_u se debe calcular la ganancia estática K del proceso. El producto $K.K_u$ puede utilizarse para determinar si el método de ganancia límite es adecuado para el ajuste del controlador. Si $2 < KK_u < 20$ el método se puede utilizar. Si $K.K_u < 2$ se necesita

diseñar un controlador con compensación de tiempo muerto. Si $K.K_u > 20$ debe utilizarse un algoritmo de control más complejo.

Los controladores estimados utilizando el método de ganancia límite dan un sistema en lazo cerrado con un coeficiente de amortiguamiento bajo. Para obtener mejores resultados se pueden introducir ligeras modificaciones en los valores obtenidos para los parámetros del controlador.

Tabla 6.1 Ajuste de controladores por el método de ganancia límite

$\boldsymbol{Controlador}$	$\boldsymbol{K_c}$	$\boldsymbol{\tau_i}$	$\boldsymbol{\tau_d}$
P	$0.5K_u$	$-$	$-$
PI	$0.45K_u$	$0.83T_u$	$-$
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.125T_u$

Una vez calculados K_c, τ_i y τ_d se utilizan las ecuaciones 6.5, 6.10 ó 6.16 con el fin de obtener los parámetros del controlador digital.

6.2.2 Método de la Curva de Reacción. Además de las fórmulas para ajuste de controladores en línea, es decir, por el método de ganancia límite, Ziegler y Nichols propusieron otro método de ajuste de controladores asumiendo que la función de transferencia de lazo abierto de la planta se puede aproximar a un modelo de primer orden con retardo, obtenido a partir de la respuesta del sistema ante una entrada en escalón, tal como se analizó en la sección 5.3.1.

Entonces, dada la función de transferencia en lazo abierto:

$$G_p(S) = \frac{Ke^{-\theta' S}}{\tau S + 1} \qquad 6.17$$

En donde K es la ganancia, τ la constante de tiempo y θ' es el retardo.

Los parámetros de ajuste del controlador se estiman a partir de la tabla 6.2 haciendo en ella $\theta = \theta' + T/2$, en donde $T/2$ es una aproximación correspondiente al retardo introducido por el muestreador y el retenedor y T es el período de muestreo.

El método de Ziegler-Nichols es aplicable sí $0.1 < \theta'/\tau < 1$. Para valores mayores de θ'/τ se recomienda utilizar controladores con compensación de tiempo muerto y para valores menores se recomienda utilizar controladores de orden mayor.
Una vez calculados K_c, τ_i y τ_d se puede obtener el algoritmo de control requerido utilizando las ecuaciones 6.5, 6.10 o 6.16 según el caso.

Tabla 6.2 Ajustes de Ziegler-Nichols para el controlador $(\theta = \theta' + T/2)$

$\boldsymbol{Controlador}$	$\boldsymbol{K_c}$	$\boldsymbol{\tau_i}$	$\boldsymbol{\tau_d}$
$\boldsymbol{P}$	$\frac{\tau}{K\theta}$	$-$	$-$
$\boldsymbol{PI}$	$\frac{0.9\tau}{K\theta}$	3.33θ	$-$
$\boldsymbol{PID}$	$\frac{1.2\tau}{K\theta}$	2θ	0.5θ

6.2.3 Ajustes Mediante Criterios de Error Mínimo: Una de las exigencias con que debe cumplir un sistema de control es la exactitud. Esto implica que el error, es decir, la diferencia entre el Set-point y el valor de la variable controlada se debe minimizar.
Como los sistemas de control son dinámicos, las especificaciones de su comportamiento se pueden dar en términos de la respuesta transitoria ante entradas especificadas, como el escalón, la rampa, etc. o se pueden dar en términos de un índice de desempeño.
El índice de desempeño es un número que indica la "calidad" del comportamiento de un sistema. Se dice que el sistema es óptimo, si los valores de los parámetros se diseñan de modo que el índice de desempeño sea mínimo o máximo según el caso. Para que un índice desempeño sea útil, debe ser una función de los parámetros del sistema y debe presentar un máximo o un mínimo [6.3].
A continuación se presentan algunos índices de desempeño basados en integrales del error y utilizados ampliamente en el diseño de sistemas de control. El sistema óptimo será el que minimice esa integral.

Integral del valor absoluto del error:

$$IAE = \int_0^\infty |e(t)|dt \qquad 6.18$$

Integral del cuadrado del error:

$$ICE = \int_0^\infty e^2(t)dt \qquad 6.19$$

Integral del error absoluto del error por el tiempo:

$$IAET = \int_0^\infty t|e(t)|\,dt \qquad 6.20$$

Integral del cuadrado del error por el tiempo:

$$ICET = \int_0^\infty te^2\,(t)dt \qquad 6.21$$

Las ecuaciones 6.18 a 6.21 constituyen las cuatro integrales básicas de error que se pueden minimizar para un lazo de control particular, mediante el ajuste de los parámetros del controlador.

Si se considera que el sistema se puede aproximar a un modelo de primer orden con retardo, como el representado por la ecuación 6.17, el ajuste para los controladores se puede resumir así [6.4]:

Tabla 6.3 Ajustes para el controlador P. $(\theta = \theta' + T/2)$

$\boldsymbol{Control\ P}$	$\boldsymbol{ICE}$	$\boldsymbol{IAE}$	$\boldsymbol{IAET}$
$K_c = \frac{a}{K}\left[\frac{\theta}{\tau}\right]^b$	$a = 1.411$ $b = -0.917$	0.902 -0.985	0.940 -1.084

Tabla 6.4 Ajustes para el controlador PI. $(\theta = \theta' + T/2)$

$\boldsymbol{Control\ PI}$	$\boldsymbol{ICE}$	$\boldsymbol{IAE}$	$\boldsymbol{IAET}$
$K_c = \frac{a}{K}\left[\frac{\theta}{\tau}\right]^b$	$a = 1.305$ $b = -0.959$	0.984 -0.986	0.859 -0.977
$\tau_i = \frac{\tau}{a}\left[\frac{\theta}{\tau}\right]^b$	$a = 0.492$ $b = 0.739$	0.608 0.707	0.674 0.680

Tabla 6.5 Ajustes para el controlador PID. $(\theta = \theta' + T/2)$

$\boldsymbol{Control\ PID}$	$\boldsymbol{ICE}$	$\boldsymbol{IAE}$	$\boldsymbol{IAET}$
$K_c = \frac{a}{K}\left[\frac{\theta}{\tau}\right]^b$	$a = 1.495$ $b = -0.945$	1.435 -0.921	1.357 -0.947
$\tau_i = \frac{\tau}{a}\left[\frac{\theta}{\tau}\right]^b$	$a = 1.101$ $b = 0.771$	0.878 0.749	0.842 0.738
$\tau_d = a\tau\left[\frac{\theta}{\tau}\right]^b$	$a = 0.560$ $b = 1.006$	0.482 1.137	0.381 0.995

Los valores obtenidos para K_c, τ_i y τ_d se aplican, según el caso, a las ecuaciones 6.5, 6.10 o 6.16 con el fin de obtener el algoritmo de control digital requerido.

EJEMPLO 6.1

La función de transferencia de lazo abierto de un sistema térmico resultó ser:

$$G_p(S) = \frac{2.38e^{-0.45S}}{1.39S + 1}$$

Obtener para este sistema: a) Un controlador PI por ganancia límite. b) Un controlador PI utilizando el método de Ziegler-Nichols. c) Un controlador PI a partir del método de la integral IAE. (Los tiempos están en min.)

SOLUCIÓN: Para calcular los controladores es necesario estimar, inicialmente, el período de muestreo adecuado. Prescindiendo del tiempo de retardo, el ancho de banda del sistema, en lazo cerrado, se puede calcular en la siguiente forma:

$$G_w(S) = \frac{G_p(S)}{1 + G_p(S)} = \frac{0.704}{0.411S + 1}$$

Ahora se hace $S = jw$ y se calcula la magnitud de $G_w(jw)$ cuando $w = 0$

$$G_w(jw) = \frac{0.704}{j0.411w + 1} \qquad |G_w(jw)| = \frac{0.704}{\sqrt{0.1689w^2 + 1}}$$

$$|G_w(j0)| = 0.704$$

Finalmente, se calcula el valor de w_c correspondiente a la frecuencia para la cual la magnitud $|G_w(jw)|$ ha caído en 3db:

$$\frac{0.704}{\sqrt{0.1689w_c^2+1}} = 0.707 * 0.704 \qquad w_c = 2.43\ rad/min$$

El ancho de banda es $2.43\ rad/min$. Utilizando las ecuaciones 1.13 se obtiene:

$$8w_c \leq w_s \leq 12w_c \qquad T = \frac{2\pi}{w_s}$$

$19.44 \leq w_s \leq 29.16$ con $w_s = 19.44\ rad/\min$ $T = 0.32\ min$

Si se toma $T = 0.32\ min$, para discretizar el sistema se obtiene:

$$HG(z) = (1-z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} = \frac{0.3041(z+0.6095)}{z^2(z-0.7944)}$$

a) Control PI por ganancia límite: Los parámetros K_u y T_u se pueden evaluar a partir del diagrama de Bode del sistema continuo en lazo abierto o calculando en forma analítica el margen de ganancia y la frecuencia de cruce de fase del mismo. Las expresiones para evaluar la magnitud y el ángulo de fase del sistema continuo son respectivamente:

$$\left|G_p(jw)\right| = \frac{2.38}{\sqrt{1.932w^2+1}} \qquad \theta = -25.8w - \tan^{-1}(1.39w)$$

El margen de ganancia se calcula con w_π cuando $\theta = -180^o$ es decir:

$$-180^o = -25.8w_\pi - \tan^{-1}(1.39w_\pi) \qquad w_\pi = 3.89\ rad/min$$

$$MG = \frac{1}{\left|G_p(jw_\pi)\right|} = \frac{2.38}{\sqrt{1.932 * 3.89^2+1}} \qquad MG = 0.432$$

$$K_u = \frac{1}{MG} \qquad T_u = \frac{2\pi}{w_\pi}$$

Por lo tanto:

$$K_u = \frac{1}{0.432} = 2.31 \qquad T_u = \frac{2\pi}{3.89\ rad/min} = 1.61\ min$$

Con los resultados obtenidos, los parámetros para el ajuste del controlador PI son, según la tabla 6.1:

$$K_c = 0.45K_u = 1.0395 \qquad \tau_i = 0.83T_u = 1.336\ min$$

Los parámetros del controlador PI discreto se obtienen aplicando la ecuación 6.10:

$$q_o = K_c\left[1+\frac{T}{2\tau_i}\right] = 1.164 \qquad q_1 = -K_c\left[1-\frac{T}{2\tau_i}\right] = -0.915$$

Entonces:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.164 - 0.915z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1.164z - 0.915}{z - 1}$$

b) Controlador PI utilizando el método de Ziegler- Nichols (curva de reacción) de la expresión dada para la función de transferencia del sistema térmico se encuentra que: $\tau = 1.39\ min$, $\theta' = 0.45\ min$ y $K = 2.38$. Entonces, según la tabla 6.2 y con $\theta = \theta' + T/2 = 0.61\ min$.

$$K_c = \frac{0.9\tau}{K\theta} = 0.8616 \qquad \tau_i = 3.33\theta = 2.031\ min$$

Entonces:

$$q_o = K_c\left[1 + \frac{T}{2\tau_i}\right] = 0.9294 \qquad q_1 = -K_c\left[1 - \frac{T}{2\tau_i}\right] = -0.7937$$

El controlador PI según este método es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.9294 - 0.7937z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{0.9294z - 0.7937}{z - 1}$$

c) Controlador PI utilizando el criterio de la Integral IAE: de la tabla 6.4, y con $\tau = 1.39min$, $\theta' = 0.45\ min$, $K = 2.38$ y $\theta = \theta' + T/2 = 0.61\ min$:

$$K_c = \frac{a}{K}\left[\frac{\theta}{\tau}\right]^b = \frac{0.984}{2.38}\left[\frac{0.61}{1.39}\right]^{-0.986} \qquad K_c = 0.9313$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{a}\left[\frac{\theta}{\tau}\right]^b = \frac{1.39}{0.608}\left[\frac{0.61}{1.39}\right]^{0.707} \qquad \tau_i = 1.277\ min$$

$$q_o = K_c\left[1 + \frac{T}{2\tau_i}\right] = 1.0479 \qquad q_1 = -K_c\left[1 - \frac{T}{2\tau_i}\right] = -0.8146$$

El controlador PI según este método es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.0479 - 0.8146z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1.0479z - 0.8146}{z - 1}$$

La función de transferencia de pulso en lazo cerrado del sistema con cada uno de los controladores diseñados es:

$$G_w(z) = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

Con ganancia límite: $$G_w(z) = \frac{0.3592(z-0.7861)(z+0.6095)}{z^4 - 1.794z^3 + 1.148z^2 - 0.06248z - 0.1696}$$

Con curva de reacción: $$G_w(z) = \frac{0.2826(z-0.8539)(z+0.6065)}{z^4 - 1.794z^3 + 1.077z^2 - 0.00698z - 0.1471}$$

Con criterio IAE: $$G_w(z) = \frac{0.3186(z-0.7774)(z+0.6065)}{z^4 - 1.794z^3 + 1.113z^2 - 0.0547z - 0.151}$$

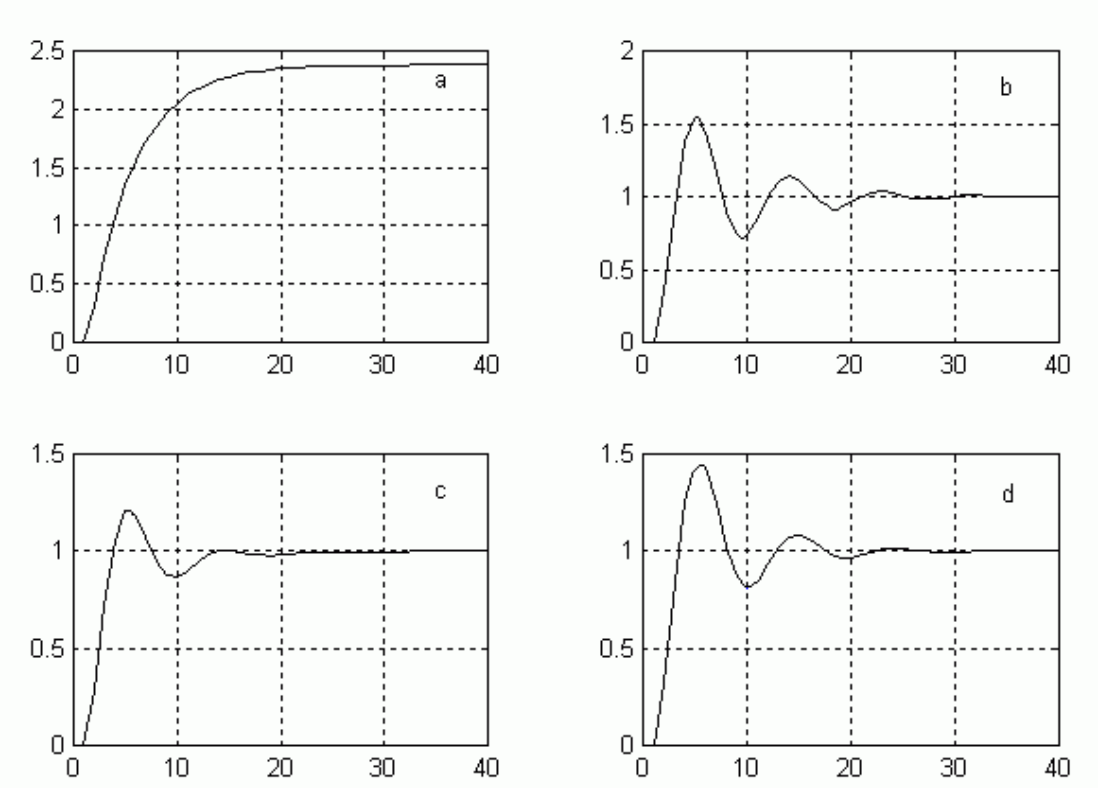


Figura 6.4 Respuesta del sistema al escalón unitario: a) en lazo abierto b) Con PI utilizando ganancia límite c) Con PI utilizando el método de la curva de reacción d) Con PI utilizando el criterio integral IAE.

En la figura 6.4 se muestra la respuesta del sistema en lazo abierto y la respuesta del mismo, en lazo cerrado, con cada uno de los controladores diseñados. Como puede observarse, los controladores calculados a partir del método de ganancia límite (figura 6.4b) y del criterio de la integral IAE (figura 6.4d) presentan un sobreimpulso muy alto comparados con el estimado a partir del método de Ziegler-Nichols.

6.3 DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES

6.3.1 Diseño de Controladores PI y PID por Cancelación de Ceros y Polos:

Este método consiste en obtener los parámetros del controlador cancelando ceros del controlador con polos de la planta. Para llevar a cabo el diseño, se asume que las funciones de transferencia de los controladores son:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{[K_i T + 2K_c]\left[z + \frac{K_i T - 2K_c}{K_i T + 2K_c}\right]}{2(z-1)} \qquad 6.22$$

Para el controlador PI, y:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{[K_i T^2 + 2K_d + 2K_c T]\left[z^2 + \frac{K_i T^2 - 2K_c T - 4K_d}{K_i T^2 + 2K_d + 2K_c T} + \frac{2K_d}{K_i T^2 + 2K_d + 2K_c T}\right]}{2Tz(z-1)} \qquad 6.23$$

Para el controlador PID.

En donde: K_c =ganancia proporcional, K_i =ganancia integral$(1/\tau_i)$, K_d =tiempo derivativo y T = periodo de muestreo.

El procedimiento para el diseño del controlador es el siguiente:

a) Seleccionar inicialmente un error de estado estable e_{ss} adecuado. Esto permite calcular el parámetro K_i
b) **Controlador PI**: se cancela el cero del controlador con un polo de la planta. Esto permite calcular el parámetro K_c.
c) **Controlador PID**: Se cancelan los dos ceros del controlador con dos polos de la planta. Esto permite calcular los parámetros K_c y K_d.

Los errores de estado estable para entradas escalón, rampa y parábola unitarias, se analizaron en la sección 4.3.2 y se resumen a continuación:

- Para entrada escalón:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} \qquad K_p = \lim_{z\to 1} D(z)HG(z) \qquad 6.24$$

K_p = Coeficiente de error de posición

- Para entrada rampa:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \qquad K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)D(z)HG(z) \qquad 6.25$$

$K_v =$ Coeficiente de error de velocidad

- Para entrada parábola:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \qquad K_a = \frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}(z-1)^2\, D(z)HG(z) \qquad 6.26$$

$K_a =$ Coeficiente de error de aceleración.

6.3.2 Controlador por Cancelación de Ceros y Polos: La figura 6.5 muestra un sistema de control digital en lazo cerrado. El objetivo es diseñar el controlador $D(z)$, de modo que se obtenga la acción de control deseada de acuerdo con las características y condiciones de funcionamiento especificadas por el sistema.

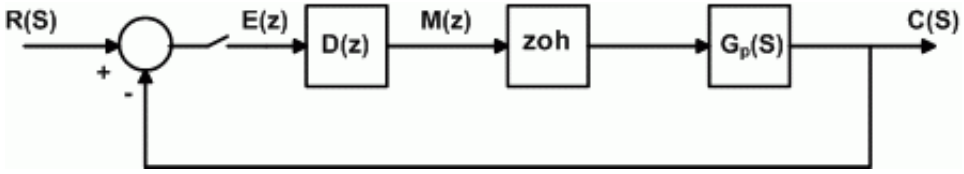


Figura 6.5 Sistema de control digital en lazo cerrado

La función de transferencia de pulso de lazo cerrado para el sistema de la figura 6.5 es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} \qquad 6.26a$$

En donde: $HG(z)$ es la función de transferencia de pulso de la planta, precedida por el retenedor de orden cero (zoh).

Si se específica cual debe ser el comportamiento de la planta en lazo cerrado, es decir, si se específica $G_w(z)$, el controlador $D(z)$ resultante a partir de la ecuación 6.26a es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1}{HG(z)} * \frac{G_w(z)}{1 - G_w(z)} \qquad 6.27$$

Así, la función de transferencia de pulso del controlador está formada por el inverso de la función de transferencia de pulso de la planta y un término adicional que depende de la función de transferencia de lazo cerrado especificada. En esta forma, una parte del controlador cancela polos y ceros de la planta.

Si se asume que la respuesta $C(z)$, ante una entrada en escalón unitario en el set-point, debe tener un error de cero en todos los instantes de muestreo después del primero, entonces:

$$C(z) = z^{-1} + z^{-2} + \cdots z^{-k} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \qquad 6.28$$

Como el cambio en la referencia es un escalón unitario se tiene que:

$$R(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \qquad 6.29$$

Utilizando las ecuaciones 6.28 y 6.29, la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = z^{-1} \qquad 6.30$$

Llevando la ecuación 6.30 a la ecuación 6.27, que corresponde a la ecuación de diseño del controlador se obtiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1}{HG(z)} * \frac{1}{z - 1} \qquad 6.31$$

El algoritmo de control dado por la ecuación 6.31 se conoce como **Algoritmo de un paso** y tiene la ventaja de la simplicidad en su diseño pero, no es recomendable para controlar procesos que tengan polos o ceros fuera o cerca del contorno del circulo unitario en el plazo z, es decir, está restringido a procesos suficientemente amortiguados y asintóticamente estables.

EJEMPLO 6.2

En el sistema de control de la figura 6.5, la función de transferencia de la planta es:

$$G_p(S) = \frac{0.5}{(S + 0.1)(S + 0.4)}$$

Diseñar para esta planta: a) un controlador PI por cancelación de ceros y polos b) un controlador utilizando el algoritmo de un paso. Los tiempos están en s.

SOLUCIÓN: El diseño debe comenzar con la selección adecuada del tiempo de muestreo para discretizar la planta.

La constante de tiempo del sistema continuo en lazo cerrado es $\tau_{eq} = 4s$. El periodo de muestreo se puede seleccionar utilizando el criterio de la constante de tiempo: $0.2(\tau_{eq} + \theta') \leq T \leq 0.6(\tau_{eq} + \theta')$. Haciendo $T = 2\,s$. se obtiene, al discretizar el sistema:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{0.5}{S(S + 0.1)(S + 0.4)}\right\}$$

$$HG(z) = \frac{0.7267z + 0.5211}{z^2 + 1.268z + 0.3679} = \frac{0.7267(z + 0.717)}{(z - 0.8185)(z - 0.4494)}$$

a) Diseño del controlador PI por cancelación de ceros y polos: asumiendo un error de estado estable $e_{ss} = 2$ se obtiene:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \qquad K_v = \frac{1}{e_{ss}} \qquad K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z - 1)D(z)HG(z)$$

$$0.5 = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z - 1)\frac{[K_iT + 2K_c]\left[z + \frac{K_iT - 2K_c}{K_iT + 2K_c}\right] * 0.7267(z + 0.717)}{2(z - 1)(z - 0.8185)(z - 0.4494)}$$

Tomando el límite con $T = 2\,s$ resulta que $K_i = 0.04$. Si se asume que el cero del controlador cancela el polo $z = 0.8185$ de la planta, se debe cumplir que:

$$\frac{K_iT - 2K_c}{K_iT + 2K_c} = -0.8185 \qquad \frac{0.08 - 2K_c}{0.08 + 2K_c} = -0.8185$$

Resolviendo se obtiene que $K_c = 0.4007$

Con los valores obtenidos para K_i y K_c y, utilizando la ecuación 6.22, se obtiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.4407(z - 0.8185)}{z - 1}$$

b) Al utilizar el algoritmo de un paso, el controlador toma la forma dada en la ecuación 6.31, es decir:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1}{HG(z)} * \frac{1}{z-1}$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.376(z-0.8185)(z-0.4494)}{(z-1)(z+0.717)}$$

La función de transferencia de pulso del sistema en lazo cerrado, con cada uno de los controladores diseñados es:

$$G_w(z) = \frac{D(z)HG(Z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

Con el controlador PI: $G_w(z) = \frac{0.3203(z+0.717)}{z^2 - 1.1292z + 0.679}$

Con el algoritmo de un paso: $G_w(z) = \frac{1}{z}$

Las figura 6.6a y 6.6c muestran la respuesta del sistema ante un cambio en escalón unitario aplicado en la referencia y las figuras 6.6b y 6.6d muestran la acción del controlador sobre el elemento final de control (válvula), utilizando el controlador PI por cancelación de polos y ceros y el algoritmo de un paso respectivamente.

Efecto Timbre: Al observar la forma de la respuesta del sistema en lazo cerrado con el algoritmo de un paso, dada en la figura 6.6c, se podría decir que es satisfactoria y que cumple con los requerimientos establecidos en el diseño. Sin embargo, si se analiza la figura 6.6d se observa que la acción del controlador sobre el elemento final de control es inaceptable dada la alta cantidad de oscilaciones a que es sometido al principio, las cuales producen un trabajo innecesario en el mismo. Estas oscilaciones son características en los controladores de cancelación en los que el periodo de muestreo es demasiado alto para las especificaciones que se pretenden cumplir.

Este fenómeno se conoce con el nombre de **"efecto timbre"** o de **"oscilaciones ocultas"** y se debe a que, en la etapa de diseño, no fue considerado el comportamiento de la señal actuante y sólo se prestó atención a la forma global de la función de transferencia deseada para la planta bajo control.

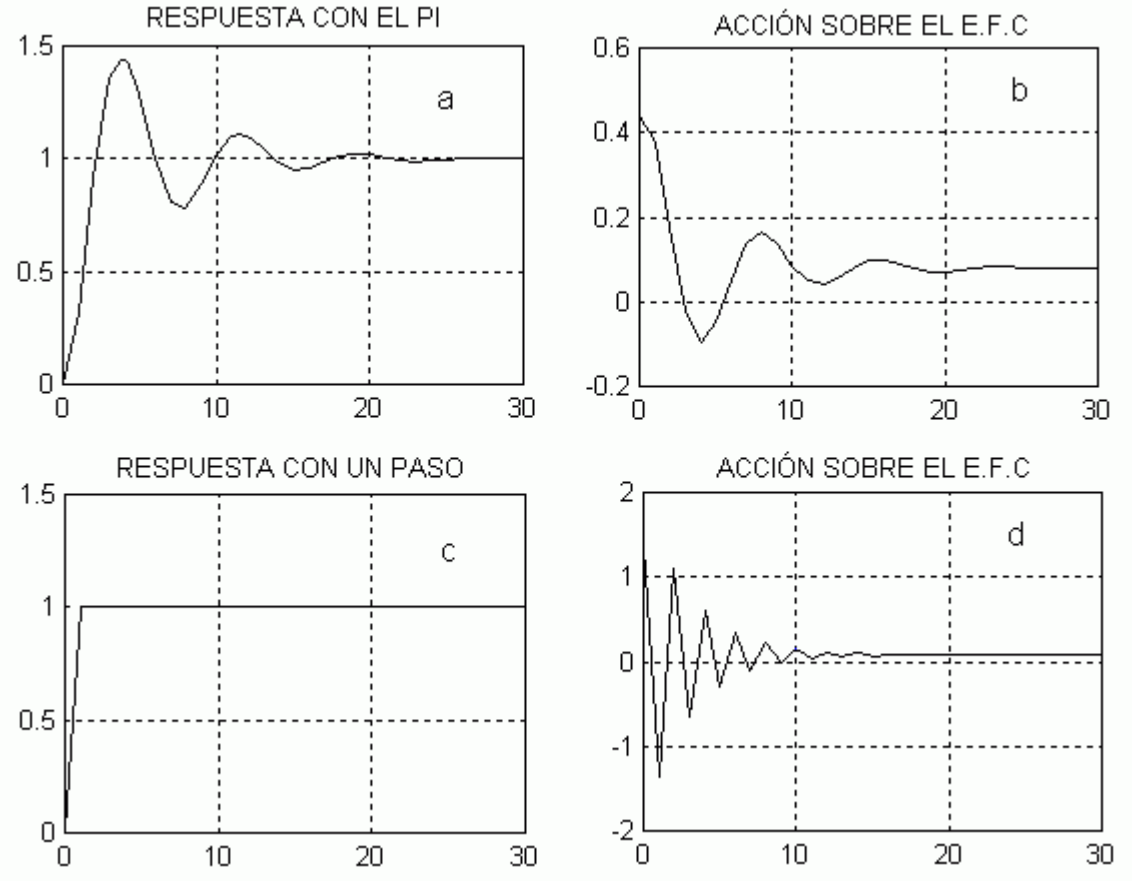


Figura 6.6 Respuesta del sistema: a) Con el control PI c) Con el algoritmo de un paso. Acción sobre el E.F.C: b) Con el control PI d) Con el algoritmo de un paso.

La causa de las oscilaciones en el elemento final de control, está en los polos del controlador con parte real negativa y se puede obviar reemplazando dichos polos por una ganancia que se obtiene haciendo $z = 1$ en ellos [6.5].

Con la observación anterior, en el algoritmo de un paso, el polo ubicado en $z = -0.717$ es el que produce el efecto timbre, si en este polo se reemplaza z por 1 y luego se simplifica el resultado, se obtiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.376(z - 0.8185)(z - 0.4494)}{(z - 1)(z + 0.717)} = \frac{1.376(1 - 0.8185z^{-1})(1 - 0.4494z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.717z^{-1})}$$

Haciendo $z = 1$ en el polo $z = -0.717$:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.376(1 - 0.8185z^{-1})(1 - 0.4494z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.717)}$$

Simplificando resulta:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.80139(z - 0.8185)(z - 0.4494)}{z(z - 1)}$$

La figura 6.7a representa la respuesta del sistema en lazo cerrado ante un escalón unitario con el algoritmo de un paso y la figura 6.7b, corresponde a su acción sobre el elemento final de control una vez suprimido el efecto timbre reemplazando, por su ganancia correspondiente, los polos del controlador que lo producían.

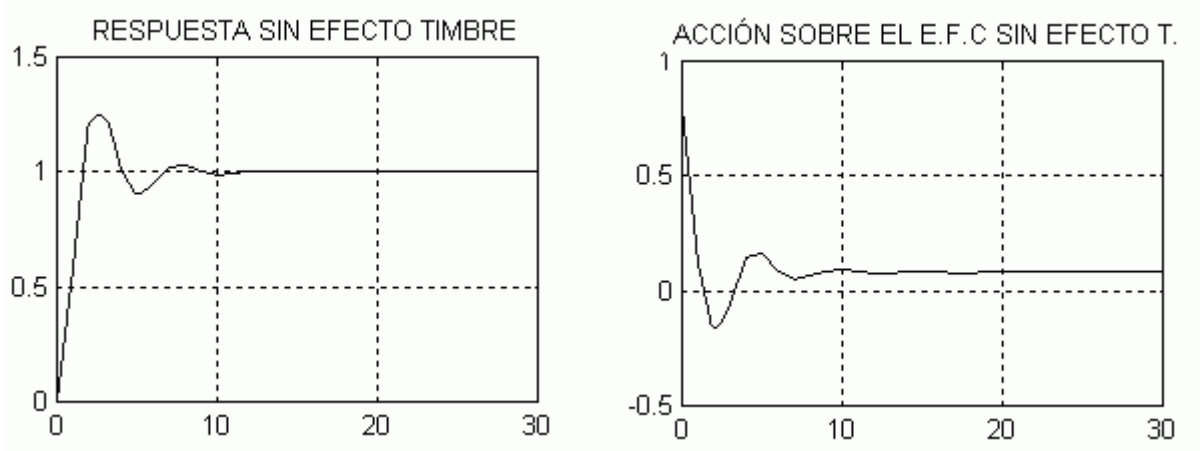


Figura 6.7 Supresión del efecto timbre a) Respuesta del sistema ante un escalón unitario b) Acción del controlador sobre el E.F.C.

6.3.3 Controlador Deadbeat de Orden Normal DB(m): También llamado de "oscilaciones muertas", se caracteriza porque con él, ante un cambio en escalón en la variable de referencia, la salida del sistema alcanza un nuevo estado de equilibrio al cabo de un tiempo de establecimiento finito definido, con error de estado estable igual a cero.

Si en el sistema de control de la figura 6.5, la función de transferencia de pulso está dada por:

$$HG(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m}} * z^{-n} \qquad 6.32$$

y se asume que el cambio en la entrada es:

$$r(k) = 1 \qquad k = 0, 1, 2 \cdots \qquad 6.33$$

Se tiene:

6.3.3.1 Para sistemas sin tiempo muerto $(\boldsymbol{n = \theta'/T = 0})$:

El requisito para tiempo de establecimiento mínimo es:

$$c(k) = r(k) \qquad \text{Para} \quad k \geq m$$

$$m(k) = m(m) \qquad \text{Para} \quad k \geq m \qquad 6.34$$

La transformada z de la señal de referencia $r(k)$, la variable controlada $c(k)$ y la variable manipulada $m(k)$ son respectivamente:

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad 6.35$$

$$C(z) = c(1)z^{-1} + c(2)z^{-2} + \cdots 1\left[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \cdots\right] \qquad 6.36$$

$$M(z) = m(0) + m(1)z^{-1} + \cdots m(m)\left[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \cdots\right] \qquad 6.37$$

Dividiendo la ecuación 6.36 entre la ecuación 6.35 se obtiene:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots p_m z^{-m} = P(z) \qquad 6.38$$

En donde:

$$p_1 = c(1) \qquad p_2 = c(2) \qquad \cdots \qquad p_m = 1 - c(m-1) \qquad 6.39$$

Dividiendo la ecuación 6.37 entre la ecuación 6.35 se obtiene:

$$\frac{M(z)}{R(z)} = q_o + q_1 z^{-1} + \cdots q_m z^{-m} = Q(z) \qquad 6.40$$

En donde:

$$q_o = m(0) \qquad q_1 = m(1) - m(0) \qquad \cdots \qquad q_m = m(m) - m(m-1) \qquad 6.41$$

Se debe tener en cuenta que:

$$p_1 + p_2 + \cdots p_m = 1 \qquad 6.42$$

$$q_0 + q_1 + \cdots q_m = m(m) = \frac{1}{K} = \frac{1}{GH(1)} \qquad 6.43$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} \quad 6.44$$

Teniendo en cuenta la ecuación 6.27 el controlador $D(z)$ es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1}{HG(z)} * \frac{G_w(z)}{1 - G_w(z)}$$

Comparando las ecuaciones 6.44 y 6.38 se concluye que:

$$G_w(z) = P(z) \quad 6.46$$

Además, de las ecuaciones 6.38 y 6.40 se deduce que:

$$HG(z) = \frac{C(z)}{M(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad 6.47$$

Por lo tanto, la ecuación del controlador Deadbeat de orden normal es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} \quad 6.48$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \cdots p_m z^{-m}} \quad 6.49$$

En donde:

$$q_0 = \frac{1}{\sum b_i} = \frac{1}{b_1 + b_2 + \cdots b_m}$$

$$q_1 = a_1 q_0 \qquad p_1 = b_1 q_0$$

$$q_2 = a_2 q_0 \qquad p_2 = b_2 q_0 \quad 6.50$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$q_m = a_m q_0 \qquad p_m = b_m q_0$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 6.49 y 6.50, la ecuación del controlador Deadbeat de orden normal se puede escribir así:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1})} \quad 6.51$$

Con este tipo de controlador, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema bajo control está dada por:

$$G_w(z) = P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots p_m z^{-m}$$

$$G_w(z) = \frac{p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \cdots p_m}{z^m} \qquad 6.52$$

La ecuación característica es, por lo tanto:

$$1 + D(z)HG(z) = z^m = 0 \qquad 6.53$$

6.3.3.2 Para sistemas con tiempo muerto (n=θ´/T = 1, 2, 3,...): la ecuación 6.32 se puede escribir en la forma:

$$HG(z) = \frac{b_1 z^{-(1+n)} + b_2 z^{-(2+n)} + \cdots b_m z^{-(m+n)}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \cdots + a_m z^{-m}} \qquad 6.54$$

En estas condiciones, el requisito para tiempo de establecimiento mínimo es:

$c(k) = r(k) = 1$ Para $k \geq m + n$

$m(k) = m(m)$ Para $k \geq m$

Se puede demostrar [6.6], que este requisito se cumple con un controlador tipo Deadbeat de la forma:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots q_m z^{-m}}{1 - p_{1+n} z^{-(1+n)} - \cdots p_{m+n} z^{-(m+n)}} \qquad 6.55$$

En donde:

$$q_0 = \frac{1}{\sum b_i} \qquad p_1 = p_2 = \cdots p_n = 0$$

$$q_1 = a_1 q_0 \qquad p_{1+n} = b_1 q_0$$

$$q_2 = a_2 q_0 \qquad p_{2+n} = b_2 q_0 \qquad 6.56$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$q_m = a_m q_0 \qquad p_{m+n} = b_m q_0$$

A partir de las ecuaciones 6.55 y 6.56 e incluyendo el tiempo muerto en $B(z^{-1})$ se puede reescribir la ecuación del controlador Deadbeat para sistemas con tiempo muerto, en la siguiente forma:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1})} \qquad 6.57$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema con el controlador representado por la ecuación 6.57 es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = q_0 B(z^{-1}) z^{-n} = \frac{q_0 B'(z)}{z^{(m+n)}} \qquad 6.58$$

La ecuación característica del sistema es:

$$1 + D(z)HG(z) = z^{(m+n)} = 0 \qquad 6.59$$

6.3.4 Controlador Deadbeat de Orden Incrementado DB(m+1): Si el tiempo de establecimiento se incrementa de m a $m+1$, es posible elegir un valor inicial para la variable manipulada. Como $m(0)$ generalmente es el valor mayor, este valor puede reducirse asumiendo un valor adecuado para $m(0)$, con el fin de evitar señales de actuación muy altas sobre el elemento final de control.

6.3.4.1 Para sistemas sin tiempo muerto (n=0): Si en las ecuaciones 6.38 y 6.40, el tiempo de establecimiento se lleva de m a $m+1$, ellas toman la forma:

Dividiendo la ecuación 6.36 entre la ecuación 6.35 se obtiene:

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots p_{m+1} z^{-(m+1)} \qquad 6.60$$

$$Q(z) = q_o + q_1 z^{-1} + \cdots q_{m+1} z^{-(m+1)} \qquad 6.61$$

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado en la sección 6.3.3.1, se puede demostrar [6.7] que la ecuación del controlador de orden incrementado para sistemas sin tiempo muerto está dado por:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \cdots p_{m+1} z^{-(m+1)}} \qquad 6.62$$

En donde

$$q_0 = Seleccionable \qquad q_0 = \frac{1}{(1-a_1)\sum b_i} \quad (Recomendado) \qquad 6.63$$

$$q_1 = q_o(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i} \qquad p_1 = q_o b_1$$

$$q_2 = q_o(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i} \qquad p_2 = q_o(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$q_m = q_o(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i} \qquad p_m = q_o(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum b_i}$$

$$q_{m+1} = a_m\left(\frac{1}{\sum b_i} - q_0\right) \qquad p_{m+1} = -b_m\left(q_0 - \frac{1}{\sum b_i}\right) \qquad 6.64$$

Al diseñar el controlador $DB(m+1)$ el valor de $q0 = m(0)$ no se debe elegir demasiado pequeño pues resultaría que $m(1) > m(0)$, lo que es inadecuado para

realizar un buen control. En términos generales se recomienda, como se precisó en la ecuación 6.63 que:

$$q_0 = m(0) \leq \frac{1}{(1-a_1)\sum b_i} \qquad 6.63$$

Combinando las ecuaciones 6.62, 6.63 y 6.64 se obtiene, para el controlador Deadbeat de orden incrementado sin tiempo muerto:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})[1 - z^{-1}/\alpha]}{1 - q_0 B(z^{-1})[1 - z^{-1}/\alpha]} \qquad 6.66$$

$$\alpha = \frac{q_0 \sum b_i}{q_0 \sum b_i - 1} \qquad 6.67$$

6.3.4.2 Para Sistemas con Tiempo Muerto (n = 1, 2, 3...): En este caso, la función de transferencia del controlador Deadbeat de orden incrementado $DB(m+1)$, toma la forma [6.8].

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{[q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots q_m z^{-m}][1 - z^{-1}/\alpha]}{1 - [p_{1+m} z^{-(n+1)} + p_{2+m} z^{-(n+2)} + \cdots p_{m+n} z^{-(m+n)}][1 - z^{-1}/\alpha]} \qquad 6.68$$

En donde:

$$\alpha = \frac{q_0 \sum b_i}{q_0 \sum b_i - 1} \qquad 6.69$$

Los parámetros q_i y p_i se evalúan utilizando la ecuación 6.64.

Si el retardo se incluye en el polinomio $B(z^{-1})$ la ecuación 6.68 se puede escribir en la forma:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})[1 - z^{-1}/\alpha]}{1 - q_0 B(z^{-1})[1 - z^{-1}/\alpha]} \qquad 6.70$$

EJEMPLO 6.3

La figura 6.8 representa una marmita en la cual, el sistema de control, debe mantener la temperatura del producto en el valor deseado manipulando el flujo de vapor hacia la camisa. El proceso se puede modelar como un sistema de segundo orden con retardo (tiempos en minutos), así:

$$G_p(S) = \frac{0.5e^{0.5S}}{(22S+1)(2.8S+1)}$$

Diseñar para el sistema, un controlador a) Deadbeat de orden normal b) Deadbeat de orden incrementado.

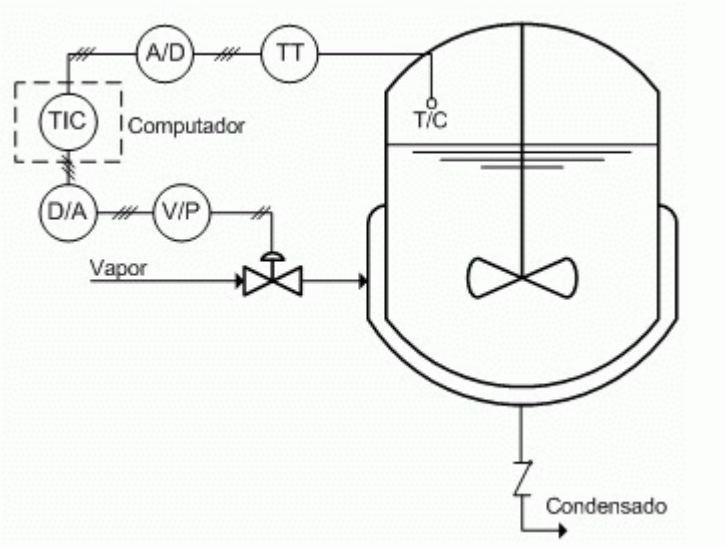


Figura 6.8 Sistema de control de temperatura para el ejemplo 6.3

SOLUCIÓN: Para discretizar el modelo del proceso se debe estimar, inicialmente, el período de muestreo adecuado. Prescindiendo del retardo, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema continuo es:

$$G_w(S) = \frac{0.008117}{S^2 + 0.40259S + 0.02435}$$

De esta expresión se obtiene que: $w_n = 0.156\, rad/min$ y $\xi = 1.29$. Para $\xi > 1$, la constante de tiempo equivalente del sistema es $\tau_{eq} = 2\xi/w_n = 16.53\, min.$

Para estimar el periodo de muestreo se utiliza el criterio:

$$0.2\left(\tau_{eq} + \theta'\right) \leq T \leq 0.6\left(\tau_{eq} + \theta'\right) \qquad 3.4 \leq T \leq 10.2\, min.$$

Si se toma $T = 5\, min$, y se aplica la transformada Z modificada, la función de transferencia de pulso del proceso es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} \qquad G(S) = \frac{0.5}{(22S + 1)(2.8S + 1)}$$

$$HG(Z) = \frac{0.04768(z + 0.7674)(z + 0.004)}{z(z - 0.7967)(z - 0.1677)} = \frac{0.04768z^{-1} + 0.03678z^{-2} + 0.000145z^{-3}}{1 - 0.9644z^{-1} + 0.1336z^{-2}}$$

Por lo tanto:

$a_1 = -0.9644 \quad a_2 = 0.1336 \quad b_1 = 0.0004768 \quad b_2 = 0.03678 \quad b_3 = 0.000145$

a) Para el controlador Deadbeat de orden normal: $\sum b_i = 0.08460$.

Entonces, según la ecuación 6.51: $q_0 = 11.8196$.

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1})}$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{11.8196(1 - 0.9644z^{-1} + 0.1336z^{-2})}{1 - 11.8196(0.04768z^{-1} + 0.03678z^{-2} + 0.000145z^{-3})}$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{11.8196 - 11.3988z^{-1} + 1.5791z^{-2}}{1 - 0.56355z^{-1} - 0.43472z^{-2} - 0.00171z^{-3}}$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{11.8196(z - 0.7967)(z - 0.1677)}{(z - 1)(z + 0.4325)(z + 0.004)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema incluido el controlador es:

$$G_w(z) = \frac{0.56355z^2 + 0.43472z + 0.00171}{z^3} = \frac{0.56355(z + 0.7674)(z + 0.004)}{z^3}$$

b) Para el controlador Deadbeat de orden incrementado, utilizando las ecuaciones 6.66 y 6.67 se obtiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})[1 - z^{-1}/\alpha]}{1 - q_0 B(z^{-1})[1 - z^{-1}/\alpha]}$$

$$q_0 = \frac{1}{(1 - a_1)\sum b_i} \qquad q_0 = \frac{1}{(1 + 0.9644) * 0.084605} \qquad q_0 = 6.0172$$

$$\alpha = \frac{q_0 \sum b_i}{q_0 \sum b_i - 1} = \frac{1}{a_1} = -\frac{1}{0.9644}$$

Con estos parámetros el controlador es:

$$D(z) = \frac{6.0172(1 - 0.9644z^{-1} + 0.1336z^{-2})(1 + 0.9644z^{-1})}{1 - 6.0172(0.04768z^{-1} + 0.03678z^{-2} + 0.000145z^{-3})(1 + 0.9644z^{-1})}$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{6.0172 - 4.79226z^{-2} + 0.77524z^{-3}}{1 - 0.28688z^{-1} - 0.49797z^{-2} - 0.21429z^{-3} - 0.000842z^{-4}}$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{6.0172z(z + 0.9644)(z - 0.7967)(z - 0.1677)}{(z - 1)(z + 0.004)(z^2 + 0.7092z + 0.21235)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema incluido el controlador es:

$$G_w(z) = \frac{0.2869z^2 + 0.4979z + 0.2142}{z^3}$$

La figura 6.9a y 6.9c representan las respuestas del sistema ante un escalón unitario aplicado en la referencia y las figuras 6.9b y 6.9d representan la acción del controlador sobre el elemento final de control utilizandoel controlador DB(m) y el controlador DB(m+1) respectivamente.

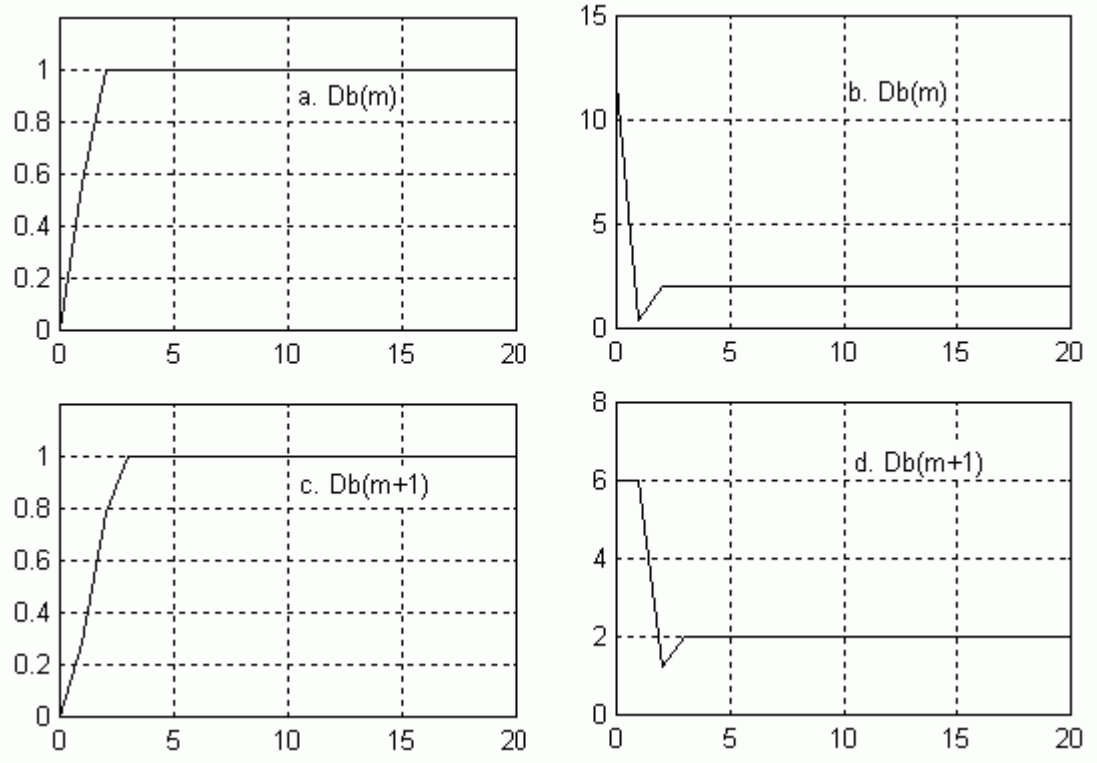


Figura 6.9 Respuesta del sistema a) Con Db(m) c) Con Db(m+1). Acción sobre el E.F.C b) Con Db(m) d) Con Db(m+1)

6.3.5 Algoritmo de Dalhin. Para el diseño de este algoritmo de control se asume que el sistema, en lazo cerrado, se comporta como un sistema de primer orden con retardo, es decir:

$$G_w(z) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\lambda e^{-\theta'}}{S + \lambda} \qquad 6.71$$

En donde: θ' es el retardo del proceso y $1/\lambda$ corresponde a la constante de tiempo del sistema deseado en lazo cerrado y se puede utilizar como parámetro

de ajuste. El tiempo muerto de la ecuación 6.71 debe ser igual al del modelo del proceso ya que si se asume menor, el controlador podría requerir valores futuros del error para calcular la salida hacia el elemento final de control.

La función de transferencia de pulso del sistema dado por la ecuación 6.71 es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\left(1 - e^{-\lambda T}\right) z^{-N-1}}{1 - e^{-\lambda T} z^{-N-1}} \qquad 6.72$$

De acuerdo con la ecuación 6.27, el controlador por cancelación de polos es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1}{HG(z)} * \frac{G_w(z)}{1 - G_w(z)} \qquad 6.73$$

Reemplazando la ecuación 6.72 en la 6.73, se obtiene el algoritmo de Dalhin para el controlador así:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1}{HG(z)} * \frac{(1 - e^{-\lambda T}) z^{-N-1}}{[1 - e^{-\lambda T} z^{-1} - (1 - e^{-\lambda T}) z^{-N-1}]} \qquad 6.74$$

Siendo T el tiempo de muestreo y $N = \theta'/T = 0, 1, 2, 3..$

La forma más simple de modelar un proceso es aproximarlo a un modelo de primer orden con retardo o a un modelo de segundo orden con retardo. En este caso, el controlador de Dalhin toma las siguientes formas:

6.3.5.1 Sistema de primer orden con retardo: El modelo de la planta toma la forma:

$$G_p(z) = \frac{K e^{-\theta' S}}{\tau S + 1} \qquad 6.75$$

La función de transferencia de pulso de la ecuación 6.75, incluyendo un retenedor de orden cero es:

$$HG(z) = \frac{K(C_1 + C_2 z^{-1}) z^{-N-1}}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}} \qquad 6.76$$

Llevando la expresión hallada para $HG(z)$ a la ecuación 6.74 se obtiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{\left[1 - e^{-\lambda T}\right]\left[1 - e^{-T/\tau} z^{-1}\right]}{K[1 - e^{-\lambda T} z^{-1} - (1 - e^{-\lambda T}) z^{-N-1}][(C_1 + C_2 z^{-1})]} \qquad 6.77$$

En donde:

$$C_1 = 1 - e^{-mT/\tau}$$

$$C_2 = e^{-mT/\tau} - e^{-T/\tau}$$

En este punto, es necesario tener presente la sección 2.4 en la cual se trabajó la transformada z modificada y se plantearon las siguientes ecuaciones:

$$N = \frac{\theta'}{T} \qquad \text{(Parte entera del cociente)}$$

$$\theta = \theta' - NT \qquad\qquad m = 1 - \frac{\theta}{T}$$

6.3.5.2 Modelo de segundo orden con retardo: Caracterizado por la función de transferencia:

$$G_p(S) = \frac{Ke^{-\theta' S}}{(\tau_1 S + 1)(\tau_2 S + 1)} \qquad 6.78$$

La función de transferencia de pulso de la ecuación 6.78, incluyendo el retenedor de orden cero es:

$$HG(z) = \frac{K(C_1 + C_2 z^{-1}) z^{-N-1}}{(1 - e^{-T/\tau_1} z^{-1})(1 - e^{-T/\tau_2} z^{-1})} \qquad 6.79$$

Reemplazando la ecuación 6.79 en la ecuación 6.74 resulta:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{\left[1 - e^{-\lambda T}\right]\left[1 - e^{-T/\tau_1} z^{-1}\right]\left[1 - e^{-T/\tau_2} z^{-1}\right]}{K[1 - e^{-\lambda T} z^{-1} - (1 - e^{-\lambda T}) z^{-N-1}][C_1 + C_2 z^{-1}]} \qquad 6.80$$

En donde:

$$C_1 = 1 + \frac{\tau_1 e^{-T/\tau_1} - \tau_2 e^{-T/\tau_2}}{\tau_2 - \tau_1}$$

$$C_2 = e^{-T(1/\tau_1 + 1/\tau_2)} + \frac{\tau_1 e^{-T/\tau_1} - \tau_2 e^{-T/\tau_2}}{\tau_2 - \tau_1}$$

La selección del parámetro de ajuste λ debe hacerse cuidadosamente, de modo que el sistema sea físicamente realizable.

Para ello se recomienda que el sistema, en lazo cerrado, tenga una constante de tiempo entre 1.25 y 4 veces más pequeña que la del sistema en lazo abierto. Es decir que:

$$\frac{1.25}{\tau_{eq}} \leq \lambda \leq \frac{4}{\tau_{eq}} \qquad 6.81$$

EJEMPLO 6.4

La figura 6.10 representa un intercambiador de calor. El objetivo es mantener la temperatura de salida $T_0(t)$ en el valor deseado, en presencia de variaciones en el flujo del fluido que se procesa, $F(t)$ y de la temperatura de entrada $T_i(t)$. La variable que se manipula para controlar la temperatura de salida es el flujo de vapor $F_s(t)$. El modelo que describe la dinámica del intercambiador puede representarse por la función de transferencia:

$$G_p(S) = \frac{T_0(S)}{F_s(S)} = \frac{0.8e^{-0.5S}}{(30S+1)(5S+1)(2S+1)}$$

Diseñar un controlador tipo Dalhin para el intercambiador.

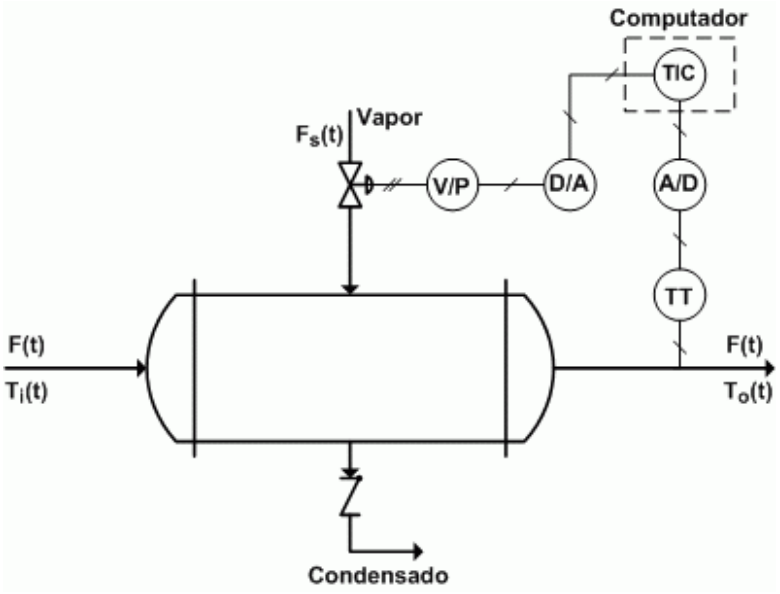


Figura 6.10 Sistema de control de temperatura para el intercambiador de calor del ejemplo 6.4

SOLUCIÓN: El ancho de banda del sistema en lazo cerrado es $w_c = 0.0681\ rad/min$. El tiempo de muestreo se puede estimar teniendo en cuenta el criterio: $8w_c \leq w_s \leq 12w_c$. Si se asume que $w_s = 8w_c = 0.544\ rad/min$, el período de

muestreo es $T = 2\pi/w_s = 11.5\,min$. Se asume, $T = 11\,min$. Así, la función de transferencia de pulso para el sistema, en lazo abierto es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} = (1 - z^{-1})\Im_m\left\{\frac{0.8}{S(30S + 1)(5S + 1)(2S + 1)}\right\}$$

$$HG(z) = \frac{0.1076(z + 0.9609)(z + 0.0303)}{(z - 0.693)(z - 0.1108)(z - 0.0041)}$$

La constante de tiempo equivalente del sistema en lazo abierto es $\tau_{eq} = 37\,min$. Se puede asumir para el sistema, en lazo cerrado, una constante de tiempo igual a la tercera parte de la constante de tiempo de lazo abierto, es decir $\tau = 12.33\,min$. Con $N = \theta'/T$ =0, $\lambda = 1/\tau = 0.0811$ y utilizando la ecuación 6.74, el controlador de Dalhin es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{(z - 0.693)(z - 0.1108)(z - 0.0041)}{0.1076(z + 0.9609)(z + 0.0303)} * \frac{0.5902z^{-1}}{[1 - 0.4098z^{-1} - 0.5902z^{-1}]}$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{6.485(z - 0.693)(z - 0.1108)(z - 0.0041)}{(z - 1)(z + 0.9609)(z + 0.0303)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema incluido el controlador es:

$$G_w(z) = \frac{T_0(z)}{F_s(z)} = \frac{0.5902}{z - 0.4098}$$

La figura 6.11 muestra la respuesta del sistema ante un escalón unitario aplicado en el set-point y, la figura 6.11b, da la acción del controlador sobre el elemento final de control. Como puede verse, el sistema de control presenta un marcado efecto timbre debido, especialmente, al polo ubicado en $z = -0.9609$. Para eliminar este efecto, se reemplazan los polos del controlador, con parte real negativa, por una ganancia equivalente obtenida al hacer en ellos $z = 1$. Así el controlador de Dalhin toma la forma:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.7149(z - 0.693)(z - 0.1108)(z - 0.0041)}{z^2(z - 1)}$$

En la figura 6.11c y 6.11d se dan respectivamente, la respuesta del sistema y la acción del controlador sobre el elemento final de control, una vez suprimido el efecto timbre.

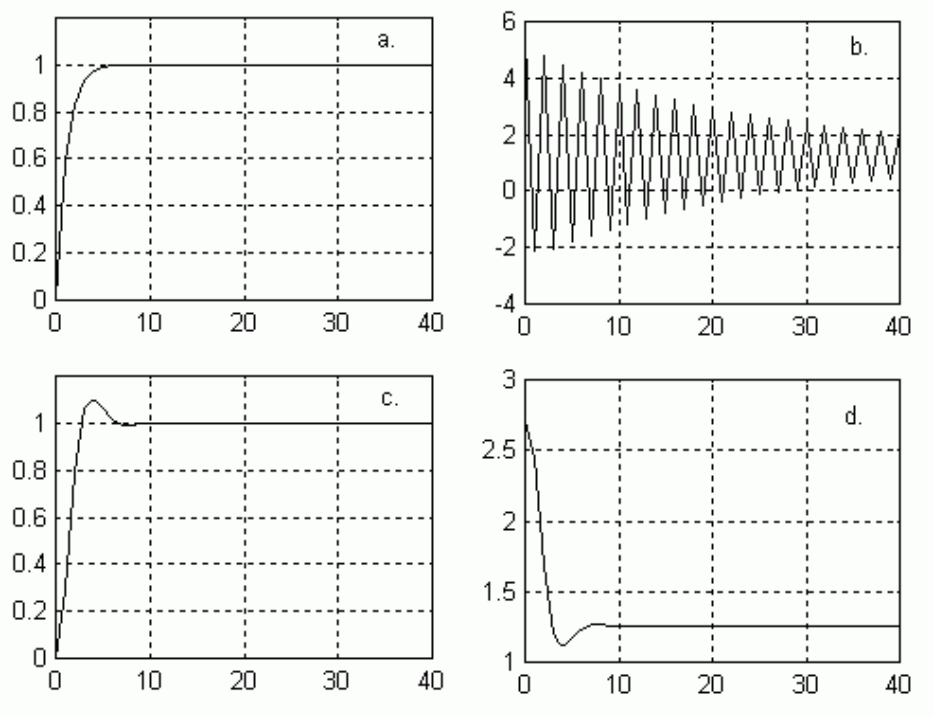


Figura 6.11. Controlador de Dalhin: a y b respuestas sin suprimir el efecto timbre. c y d respuestas una vez suprimido el efecto timbre.

6.3.6 Diseño de controladores digitales por asignación de polos: Con el método de asignación de polos se busca que el sistema en lazo cerrado posea un comportamiento dinámico específico. Esto exige que la ecuación característica del sistema sea igual a un polinomio $Q(z)$ propuesto según especificaciones de diseño.

La técnica consiste en determinar los polos de lazo cerrados deseados, tomando como base los requisitos de respuesta transitoria y/o de frecuencia tales como: velocidad de respuesta, coeficiente de amortiguamiento, máximo sobreimpulso, tiempo de establecimiento, ancho de banda, etc.

6.3.6.1 Diseño por asignación de polos (Primer método): Considerando el sistema de la figura 6.12, su función de transferencia de lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{B(z^{-1})N(z^{-1})z^{-d}}{A(z^{-1})M(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})z^{-d}} \qquad 6.82$$

En donde:

$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}$

$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots b_n z^{-n}$

$M(z^{-1}) = 1 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} \cdots$

$R(z^{-1}) = r_o + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} \cdots$

Se desea que $G_w(z)$ tenga la forma:

$$G_w(z) = \frac{Q(1)}{B(1)} * \frac{B(z^{-1})}{Q(z^{-1})} * z^{-d} \qquad 6.83$$

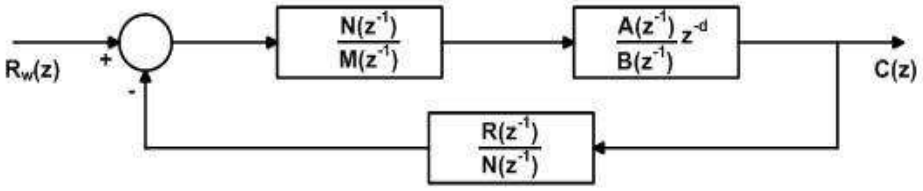


Figura 6.12 Controlador por asignación de polos

En la función de transferencia propuesta no se incluyen ceros adicionales a los del proceso ni se cancelan ceros del sistema original, por lo tanto esta técnica de diseño se puede aplicar aún si el sistema tiene ceros inestables.

Comparando las ecuaciones 6.82 y 6.83 se obtiene:

$$A(z^{-1})M(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})z^{-d} = Q(z^{-1}) \qquad 6.84$$

$Q(z^{-1})$ es la ecuación característica deseada para el sistema en lazo cerrado por lo tanto, los polinomios $M(z^{-1})$ y $R(z^{-1})$ se obtienen al resolver la ecuación polinómica dada en 6.84

Para que la ganancia del sistema sea unitaria, se debe cumplir que:

$$\frac{B(1)N(1)}{A(1)M(1) + B(1)R(1)} = 1 \qquad 6.85$$

Lo anterior significa que para el polinomio $N(z^{-1})$ se cumple:

$$N(1) = \frac{Q(1)}{B(1)} = \frac{A(1)M(1) + B(1)R(1)}{B(1)} \qquad 6.86$$

Para determinar el polinomio $Q(z^{-1})$ se deben tener en cuenta las características de respuesta temporal y/o de frecuencia deseadas para el sistema en lazo cerrado.

Para que la ecuación 6.84 tenga solución única, es necesario que los grados de los polinomios $R(z^{-1})$, $M(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ sean:

$$grad(R) = grad(A) - 1$$
$$grad(M) = grad(B) + d - 1 \qquad 6.87$$
$$grad(Q) = Max[grad(A) + grad(M)\,, grad(B) + grad(R) + d\ ]$$

6.3.6.2 Diseño por asignación de polos (Segundo método): Para diseñar un controlador digital por asignación de polos utilizando este método se procede así:

a) Se conforma la ecuación característica del sistema incluyendo el controlador a diseñar:

$$1 + D(z)HG(z) = 0 \qquad 6.88$$

b) Se conforma la ecuación característica deseada seleccionando los polos dentro del círculo unitario, de acuerdo a los requisitos del diseño especificados. Esta ecuación debe ser del mismo orden que la del sistema planta-controlador.

$$(z + p_1)(z + p_2)\cdots(z + p_n) = 0 \qquad 6.89$$

En donde $p_1, p_2 \ldots p_n$ son los polos deseados para el sistema en lazo cerrado

c) Se comparan uno a uno los coeficientes de igual potencia en z en las ecuaciones 6.88 y 6.89, de esta comparación resultan n ecuaciones simultáneas cuya solución, genera los parámetros del controlador.

Al aplicar esta técnica, es muy importante la selección adecuada del período de muestreo de modo que el sistema deseado no requiera señales de control excesivamente grandes las cuales lo puedan llevar a saturación. Si el sistema entra en saturación, se vuelve no lineal, y el método de asignación de polos ya no será aplicable, pues solamente lo es para sistemas lineales e invariantes en el tiempo [6.9]

EJEMPLO 6.5

La figura 6.13 muestra un sistema de control de flujo. Utilizando el método de la curva de reacción se encontró experimentalmente que la función de transferencia del proceso en lazo abierto es:

$$G_p(S) = \frac{0.45e^{-0.1S}}{0.8S + 1}$$

Diseñar un controlador PI por asignación de polos de modo que el sistema, en lazo cerrado, tenga un coeficiente de amortiguamiento de 0.8 y tiempo de establecimiento de $2\ s$.

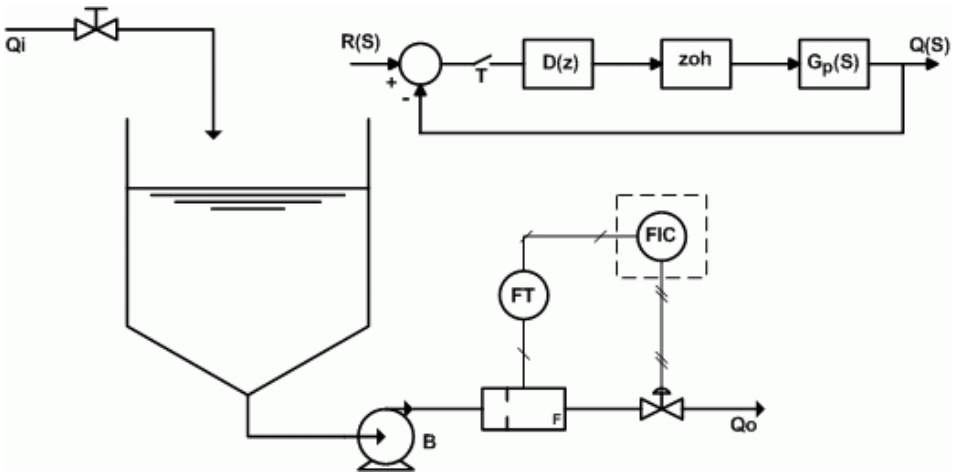


Figura 6.13 Sistema de control para el ejemplo 6.5

SOLUCIÓN: Sin tener en cuenta el retardo, la constante de tiempo del sistema continuo en lazo cerrado es $\tau_{eq} = 0.551\ s$. De acuerdo con el criterio de la constante de tiempo: $0.2(\tau_{eq} + \theta') \leq T \leq 0.6(\tau_{eq} + \theta')$ el periodo de muestreo está en el rango: $0.13 \leq T \leq\ 0.39\ s$. Haciendo $T =\ 0.2\ s$, la función de transferencia de pulso del sistema en lazo abierto es:

$$HG(z) = \frac{0.05288z + 0.04666}{z^2 - 0.7788z} = \frac{0.05288(z + 0.8824)}{z(z - 0.7788)}$$

La ecuación característica del sistema planta-controlador, en lazo cerrado, es:

$$1 + D(z)HG(z) = 0$$

$$1 + \frac{q_o z + q_1}{z - 1} * \frac{0.05288(z + 0.8824)}{z(z - 0.7788)} = 0$$

$$z^3 + (0.05288q_o - 1.7788)z^2 + (0.04666q_o + 0.05288q_1 + 0.7788)z + 0.04666q_1 = 0$$

La ecuación característica deseada debe ser de tercer orden y satisfacer los requerimientos de funcionamiento especificados para el sistema en lazo cerrado:

$\xi = 0.8$ y $t_s = 2s$.

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} \qquad w_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0.8 * 2} \qquad w_n = 2.5\, rad/s$$

La ubicación del polo dominante en lazo cerrado es:

$$|z| = e^{-\xi w_n T} \qquad \theta = 57.3 w_n T\sqrt{1-\xi^2}$$

$$|z| = e^{-(0.8*2.5*0.2)} = 0.6703$$

$$\theta = 57.3 * 2.5 * 0.2\sqrt{1-(0.8)^2} = 17.19^o$$

Es decir, el polo dominante de lazo cerrado es:

$$z = 0.6703 \measuredangle 17.19^o = 0.6403 \pm j0.1981$$

Así, la ecuación característica deseada será:

$$(z - 0.6403 - j0.1981)(z - 0.6403 + j0.1981)(z + a) = 0$$

$$z^3 + (a - 1.2806)z^2 + (0.4492 - 1.2806a)z + 0.4492a = 0$$

Comparando término a término las dos ecuaciones características se obtiene:

$$0.05288q_o - 1.7788 = a - 1.2806$$

$$0.04666q_o + 0.05288q_1 + 0.7788 = 0.4492 - 1.2806a$$

$$0.04666q_1 = 0.4492a$$

Para el controlador PI se debe cumplir que $q_1 < 1$ y para estabilidad se debe cumplir que $|a| < 1$

Resolviendo las ecuaciones anteriores resulta que:

$q_o = 3.977$ $q_1 = -2.7713$ $a = -0.2878$. Con estos valores el controlador pedido es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{3.977z - 2.7713}{z - 1} = \frac{3.977(z - 0.6968)}{z - 1}$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema toma la forma:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.2103(z + 0.8824)(z - 0.6968)}{(z - 0.2878)(z^2 - 1.2806z + 0.4492)}$$

En la figura 6.14a se da la respuesta del sistema en lazo cerrado ante un escalón unitario y en la figura 6.14b la acción del controlador sobre la válvula.

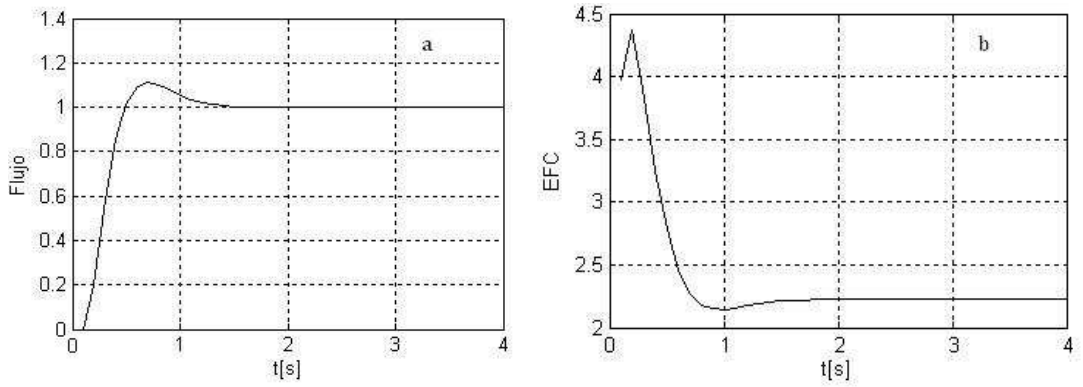


Figura 6.14 a) Respuesta del sistema al escalón unitario b) Acción del controlador sobre la válvula

6.3.7 Diseño de un controlador PI por asignación y cancelación de polos para un sistema de primer orden (POR): Si la dinámica del sistema se aproxima a la de un sistema de primer orden con retardo de la forma:

$$G_p(S) = \frac{Ke^{-\theta'}}{\tau S + 1} \qquad 6.90$$

Los modelos discretos correspondientes a dicho sistema y al controlador PI son:

$$HG(z) = \frac{(b_o + b_1 z^{-1})z^{-n}}{1 - az^{-1}} \qquad \text{y} \qquad D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_o(z - r)}{z - 1} \qquad 6.91$$

Si se selecciona el cero del controlador de modo que cancele el polo de la planta, es decir, si se hace $r = a$, la ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$Q(z) = z^{n+1} - z^n + q_o b_o z + q_o b_1 = 0 \qquad 6.92$$

Si al sistema en lazo cerrado se le condiciona a que tenga un polo estable en $z = p$, entonces, al evaluar $Q(z)$ en $z = p$ se obtiene:

$$p^{n+1} - p^n + q_o b_o p + q_o b_1 = 0 \qquad 6.93$$

Despejando q_o resulta:

$$q_o = \frac{p^n(1 - p)}{b_o p + b_1} \qquad 6.94$$

Resolviendo $Q(z)$ se puede determinar la ubicación de los n polos restantes, comprobándose que corresponden a polos no dominantes que decaen rápidamente y que el polo $z = p$ es efectivamente el polo dominante.

Este método de diseño de controladores PI se recomienda especialmente cuando

$$0 \leq \frac{\theta'}{T} \leq 2$$

En donde T es el periodo de muestreo del sistema.

EJEMPLO 6.6

Para el sistema de control de flujo del ejemplo 6.5 diseñar: a) Un controlador por asignación de polos de modo que el sistema en lazo cerrado tenga coeficiente de amortiguamiento de 0.8 y tiempo de establecimiento de 2 s. b) Un controlador PI utilizando el método de cancelación y asignación de polos de modo que el sistema tenga un polo dominante de lazo cerrado en $z = 0.8$.

SOLUCIÓN: En el ejemplo 6.5 se obtuvo, con $T = 0.2\ s$:

$$HG(z) = \frac{0.05288(z + 0.8824)}{z(z - 0.7788)} = \frac{0.05288z^{-1} + 0.04666z^{-2}}{1 - 0.7788z^{-1}}$$

a) Con $\xi = 0.8$ y $t_s = 2\ s$, los polos deseados están ubicados en $z = 0.6403 \pm j0.1981$

$A(z^{-1}) = 1 - 0.7788z^{-1}$

$B(z^{-1}) = 0.05288z^{-1} + 0.04666z^{-2}$

De la ecuación 6.84:

$$A(z^{-1})M(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})z^{-d} = Q(z^{-1})$$

De la ecuación 6.87:

$grad(R) = grad(A) - 1 = 0$

$grad(M) = grad(B) + d - 1 = 1$

$grad(Q) = Max[grad(A) + grad(M)\ , grad(B) + grad(R) + d\ ] = 2$

Por lo tanto:

$R(z^{-1}) = r_o$

$M(z^{-1}) = 1 + m_1 z^{-1}$

$$Q(z) = (z - 0.6403 - j0.1981)(z - 0.6403 + j0.1981) = z^2 - 1.2806z + 0.4492$$

$$Q(z^{-1}) = 1 - 1.2806z^{-1} + 0.4492z^{-2}$$

Reemplazando los polinomios:

$$(1 - 0.7788z^{-1})(1 + m_1 z^{-1}) + (0.05288z^{-1} + 0.04666z^{-2})r_0 = 1 - 1.2806z^{-1} + 0.4492z^{-2}$$

$$1 + (m_1 - 0.7788 + 0.05288r_o)z^{-1} + (0.04666r_o - 0.7788m_1) = 1 - 1.2806z^{-1} + 0.4492z^{-2}$$

Comparando término a término:

$$m_1 - 0.7788 + 0.05288r_o = -1.2806$$

$$0.04666r_o - 0.7788m_1 = 0.4492$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se obtiene: $m_1 = -0.5369$, $r_o = 0.6648$.

El valor de $N(1)$ se obtiene con la ecuación:

$$N(1) = \frac{Q(1)}{B(1)} = \frac{0.1686}{0.09954} = 1.6938$$

Por lo tanto:

$$M(z^{-1}) = 1 - 0.5369z^{-1}$$

$$R(z^{-1}) = 0.6648$$

$$N(z^{-1}) = 1.6938$$

$$\frac{N(z^{-1})}{M(z^{-1})} = \frac{1.6938}{1 - 0.5369z^{-1}} \qquad \frac{R(z^{-1})}{N(z^{-1})} = 0.3924$$

En la figura 6.15 se da el diagrama en bloques del sistema con el controlador diseñado y la figura 6.16a muestra la respuesta del mismo ante un escalón unitario aplicado en la referencia.

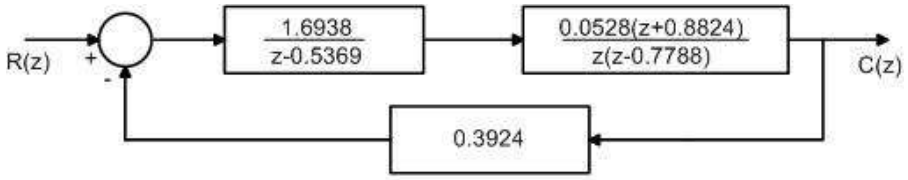


Figura 6.15 Sistema con el controlador por asignación de polos

b) Para diseñar el controlador PI por el método de asignación y cancelación de polos se tiene:

$$HG(z) = \frac{0.05288(z + 0.8824)}{z(z - 0.7788)} = \frac{0.05288 + 0.04666z^{-1}}{1 - 0.7788z^{-1}} * z^{-1}$$

$$a = 0.7788 \qquad b_o = 0.05288 \qquad b_1 = 0.04666 \qquad n = 1$$

El controlador PI toma la forma:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_o(z - r)}{z - 1}$$

Si se asume que el cero del controlador cancela el polo de la planta, entonces $r = 0.7788$.

El polo dominante deseado es $p = 0.8$ por lo tanto:

$$q_o = \frac{p^n(1 - p)}{b_o p + b_1} = \frac{0.8(1 - 0.8)}{0.05288 * 0.8 + 0.04666} \qquad q_o = 1.7984$$

El controlador pedido es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.7984(z - 0.7788)}{z - 1}$$

La figura 6.16 b muestra la respuesta del sistema con el controlador PI calculado.

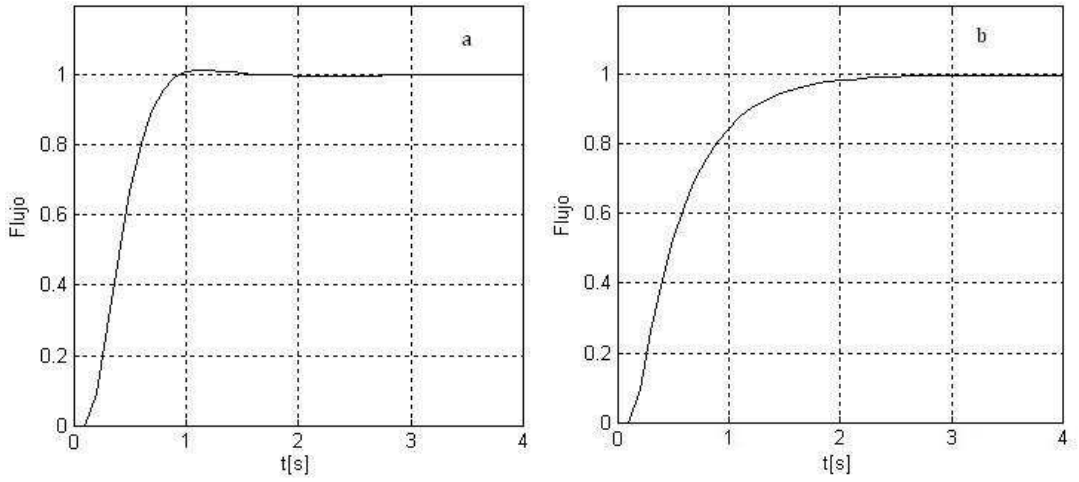


Figura 6.16 a) Respuesta con el controlador por asignación de polos. b) Respuesta con el controlador PI por cancelación y asignación de polos.

6.3.8 Método de Ciancone-Marlin: Este método de sintonía, para controladores PI y PID, se aplica cuando el modelo del proceso se aproxima a un sistema de primer orden con retardo (Sistema POR). Los parámetros para la sintonía se

obtienen utilizando procedimientos de optimización basados en criterios de la integral del error como el IAE o el ICE, teniendo en cuenta el desempeño y la robustez del algoritmo de control y los problemas de saturación de la variable manipulada. Los controladores obtenidos con este método muestran un mejor desempeño que los estimados utilizando el método de Ziegler Nichols y el de ganancia límite y presentan buena estabilidad, bajo sobreimpulso y velocidad de respuesta adecuada. [6.10]

Sea el sistema de primer orden con retardo:

$$G_p(S) = \frac{Ke^{-\theta' S}}{\tau S + 1} \qquad 6.95$$

Para obtener los parámetros del controlador mediante la técnica de Ciancone y Marlin se utiliza como parámetro la relación:

$$F = \frac{\theta'}{\theta' + \tau} \qquad 6.96$$

A partir de la cual se estiman los valores de K_c, τ_i y τ_d del controlador, así:

$$X = K_c K \qquad Y = \frac{\tau_i}{\theta + \tau} \qquad Z = \frac{\tau_d}{\theta + \tau} \qquad 6.97$$

Para sistemas discretos: $\theta = \theta' + \frac{T}{2}$

En la tabla 6.6 se dan los valores de F y los correspondientes valores de X, Y y Z que permiten obtener los parámetros del controlador: K_c, τ_i y τ_d

Tabla 6.6 Método de Ciancone-Marlin

	$PID\ (perturb)$			$PID\ (Set-Point)$			$PI\ (Perturb)$		$PI\ (Set-Point)$	
F	**X**	**Y**	**Z**	**X**	**Y**	**Z**	**X**	**Y**	**X**	**Y**
0.0	1.392	0.245	0.0	1.520	0.732	0.0	1.259	0.241	1.417	0.748
0.1	1.392	0.245	0.0	1.520	0.732	0.0	1.259	0.235	1.417	0.748
0.2	1.823	0.513	0.0	1.430	0.941	0.017	1.626	0.518	1.193	0.964
0.3	1.423	0.714	0.008	1.110	0.864	0.035	1.377	0.789	1.032	0.881
0.4	1.130	0.691	0.036	0.862	0.773	0.060	1.000	0.746	0.918	0.818
0.5	0.859	0.641	0.070	0.687	0.672	0.087	0.858	0.702	0.861	0.756
0.6	0.670	0.600	0.107	0.545	0.596	0.118	0.599	0.659	0.722	0.693
0.7	0.521	0.550	0.148	0.460	0.545	0.155	0.464	0.615	0.648	0.631
0.8	0.406	0.505	0.203	0.398	0.505	0.215	0.383	0.572	0.608	0.568
0.9	0.335	0.468	0.132	0.370	0.468	0.139	0.359	0.528	0.594	0.506
1.0	0.284	0.432	0.050	0.370	0.432	0.047	0.316	0.485	0.558	0.443

6.3.9 Método de Cohen-Coon: El ajuste de Ziegler y Nichols para sistemas de primer orden con retardo es muy sensible a variaciones en la relación de $X = \theta'/\tau$, Cohen y Coon desarrollaron una tabla modificada para mejorar esta limitación usando el mismo modelo, obteniendo buenos resultados en el desempeño del sistema. Si el retardo es muy pequeño comparado con el valor de la constante de tiempo, se obtienen para el controlador ganancias elevadas y el método no es apropiado para obtener un buen resultado en el desempeño del sistema. [6.11]

Para el modelo:

$$G_p(S) = \frac{Ke^{-\theta' S}}{\tau S + 1} \qquad 6.98$$

Los ajustes para controladores P, PI y PID propuestos por Cohen-Coon se dan en la tabla 6.7

Tabla 6.7 Ajustes de controladores según Cohen-Coon $\theta = \theta' + \frac{T}{2}$

$Control$	K_c	τ_i	τ_d
P	$\frac{\tau}{K\theta}\left[1 + \frac{\theta}{3\tau}\right]$	–	–
PI	$\frac{\tau}{K\theta}\left[0.9 + \frac{\theta}{12\tau}\right]$	$\frac{\theta[30\tau + 3\theta]}{9\tau + 20\theta}$	–
PID	$\frac{\tau}{K\theta}\left[\frac{4}{3} + \frac{\theta}{4\tau}\right]$	$\frac{\theta[32\tau + 6\theta]}{13\tau + 8\theta}$	$\frac{4\theta\tau}{11\tau + 2\theta}$

EJEMPLO 6.7

El modelo dinámico de cierta secadora de papel se puede aproximar a un sistema de primer orden con retardo así:

$$G_p(S) = \frac{0.75e^{-1.25S}}{5S + 1}$$

Obtenga un controlador PI digital a partir de a) El método de Ciancone-Marlin. b) El método de Cohen-Coon. c) Obtenga la respuesta del sistema al escalón unitario con cada controlador y compare los resultados. Asuma como periodo de muestreo $T = 1\ min.$

SOLUCIÓN. a) Método de Ciancone-Marlin: Utilizando la ecuación 6.96 se obtiene:

$$F = \frac{\theta'}{\tau + \theta'} \qquad F = \frac{1.25}{5 + 1.25} = 0.2$$

De la tabla 6.6 y con $F = 0.2$ se obtiene, para un controlador PI para cambios en el set-point: $X = 1.193, Y = 0.964.$

Utilizando la ecuación 6.97:

$$X = K_c K \qquad Y = \frac{\tau_i}{\theta + \tau} \qquad \theta = \theta' + \frac{T}{2}$$

$$K_c = \frac{X}{K} = \frac{1.193}{0.75} \qquad K_c = 1.59$$

$$\tau_i = Y(\theta + \tau) = 0.964(1.75 + 5) \qquad \tau_i = 6.504\ min$$

El controlador PI tiene como ecuación:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_o z + q_1}{z - 1} \qquad q_o = K_c\left[1 + \frac{T}{2\tau_i}\right] \qquad q_o = -K_c\left[1 - \frac{T}{2\tau_i}\right]$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.712z - 1.467}{z - 1}$$

b) Método de Cohen-Coon. Utilizando la tabla 6.7 para el controlador PI se obtiene:

$$K_c = \frac{\tau}{K\theta}\left[0.9 + \frac{\theta}{12\tau}\right] = \frac{5}{0.75 * 1.75}\left[0.9 + \frac{1.75}{12 * 5}\right] \qquad K_c = 3.539$$

$$\tau_i = \frac{\theta[30\tau + 3\theta]}{9\tau + 20\theta} = \frac{1.75[30 * 5 + 3 * 1.75]}{9 * 5 + 20 * 1.75} \qquad \tau_i = 3.396\ min$$

El controlador PI tiene como ecuación:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_o z + q_1}{z - 1} \qquad q_o = K_c\left[1 + \frac{T}{2\tau_i}\right] \qquad q_o = -K_c\left[1 - \frac{T}{2\tau_i}\right]$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{4.06z - 3.017}{z - 1}$$

La figura 6.17 muestra la respuesta del proceso con los dos controladores. Se observa que con el controlador calculado con el método de Ciancone-Marlin el

proceso tiene una velocidad de respuesta adecuada, sin sobreimpulso y error de estado estable igual a cero presentando, en general, un mejor desempeño que el controlador calculado por el método de Cohen-Coon.

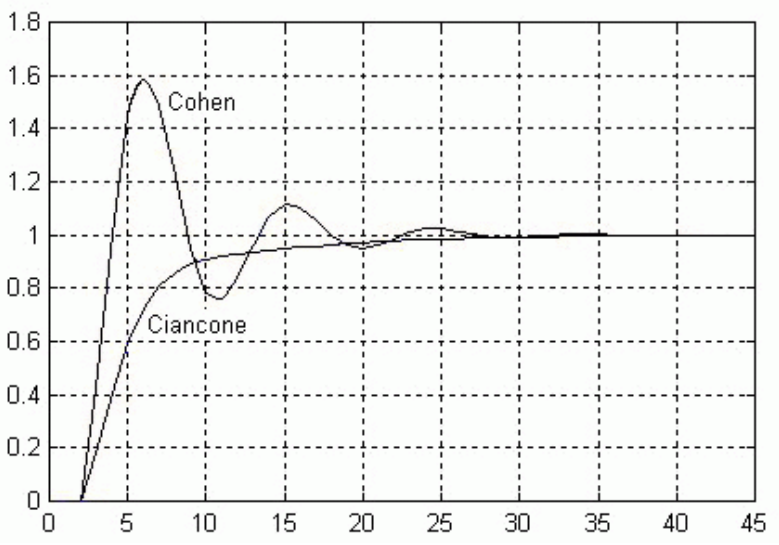


Figura 6.17 Respuesta del sistema con los controladores estimados

6.3.10 Control con modelo interno: Los métodos de control basados en modelos, incorporan dentro del controlador un modelo del proceso. Este tipo de control es conocido como control con modelo interno o IMC, por sus siglas en inglés.

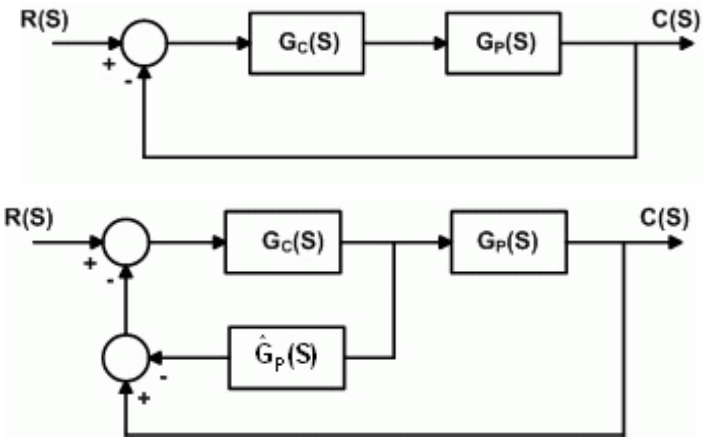


Figura 6.18 a) Sistema de control realimentado. b) Estructura IMC básica

La figura 6.18a muestra un sistema de control realimentado en donde $G_P(S)$ es el modelo de la planta y $G_c(S)$ es el controlador del sistema. La figura 6.18b muestra el diagrama de bloques básico del sistema de control basado en modelo, en donde $\hat{G}_p(S)$ es un modelo de la planta $G_p(S)$, en la práctica se hace $\hat{G}_p(S) = G_p(S)$ y $G_c'(S)$ es el modelo del controlador con modelo interno IMC. Comparando las Figuras 6.18a y 6.18b, se observa como el controlador $G_c(S)$ equivalente está dado por:

$$G_c(S) = \frac{G_c'(S)}{1 - G_c'(S)\hat{G}_p(S)} \qquad 6.99$$

La ecuación 6.99 es la base para el diseño de los controladores del tipo PID cuyos parámetros se calculan aplicando alguna de las técnicas de control con modelo interno.

Tomando como base la estructura IMC general, Rivera, Morari y Stogestad demostraron que para modelos simples esta estructura conduce a controladores del tipo PID y desarrollaron un procedimiento para obtener los controladores y lograr un cierto desempeño deseado. Para lograr la solución redefinieron el controlador IMC como:

$$G_c'(S) = G_p^{-1}(S)F(S) \qquad 6.100$$

Donde $F(s)$ es un filtro pasa bajo, que debe seleccionarse de manera que garantice que la función de transferencia del controlador IMC sea propia. El filtro es de la forma:

$$F(S) = \frac{1}{(\lambda S + 1)^n} \qquad 6.101$$

EJEMPLO 6.8

Se desea diseñar un controlador PI con modelo interno para un sistema de primer orden sin retardo. Obtener los parámetros K_c y τ_i del controlador.

SOLUCIÓN: El modelo del sistema de primer orden sin retardo es:

$$G_p(S) = \frac{K}{\tau S + 1}$$

La ecuación del controlador PI ideal es:

$$G_c(S) = K_c\left[1 + \frac{1}{\tau_i S}\right] = \frac{K_c}{\tau_i}\left[\frac{\tau_i S + 1}{S}\right]$$

Se elige la ecuación del filtro $F(S)$ como:

$$F(S) = \frac{1}{\lambda S + 1}$$

Con $\hat{G}_p(S) = G_p(S)$ Se obtiene:

$$G_c'(S) = G_p^{-1}(S)F(S) = \frac{\tau S + 1}{K(\lambda S + 1)}$$

Reemplazando en la ecuación 6.99 resulta:

$$G_c(S) = \frac{\frac{\tau S + 1}{K(\lambda S + 1)}}{1 - \frac{\tau S + 1}{K(\lambda S + 1)} * \frac{K}{(\tau S + 1)}} = \frac{\tau S + 1}{K\lambda S} = \frac{1}{K\lambda} * \frac{\tau S + 1}{S}$$

Comparando las dos ecuaciones obtenidas para el controlador $G_C(S)$ se obtiene:

$$\frac{K_c}{\tau_i}\left[\frac{\tau_i S + 1}{S}\right] = \frac{1}{K\lambda} * \frac{\tau S + 1}{S}$$

Es decir: $K_c = \frac{\tau}{K\lambda}$ y $\tau_i = \tau$

Con un procedimiento similar al anterior, Rivera et al [6.12] dedujeron, para diferentes modelos de la planta, los parámetros para los controladores como se indica en la tablas 6.8 y 6.9. Es necesario tener en cuenta que la ganancia del controlador varía inversamente con el valor del parámetro λ es decir, si λ es pequeño la ganancia del controlador es alta y la respuesta del sistema en lazo cerrado es rápida y si λ es grande la ganancia del controlador es pequeña y la respuesta del sistema en lazo cerrado es lenta.

La tabla 6.8 se aplica a un modelo de primer orden con retardo:

$$G_p(S) = \frac{Ke^{-\theta' S}}{\tau S + 1}$$

Para obtener los parámetros de dicha tabla, Rivera, Morari y Stogestad utilizan una aproximación de Padé de primer orden para el retardo así:

$$e^{-\theta S} = \frac{1 - 0.5\theta'(S)}{1 + 0.5\theta'(S)}$$

Tabla 6.8 Parámetros del IMC para un modelo POR

$\boldsymbol{Control}$	$\boldsymbol{K_c}$	$\boldsymbol{\tau_i}$	$\boldsymbol{\tau_d}$	$\boldsymbol{\lambda(Recomendado)}$
$\boldsymbol{PI}$	$\frac{\tau}{K\lambda}$	τ	$-$	$\lambda \geq 1.7\theta'$ $\lambda \geq 0.2\tau$
$\boldsymbol{PID}$	$\frac{2\tau+\theta'}{K[2\lambda+\theta']}$	$\frac{2\tau+\theta'}{2}$	$\frac{\tau\theta'}{2\tau+\theta'}$	$\lambda \geq 0.8\theta'$ $\lambda \geq 0.2\tau$

Tabla 6.9 Parámetros del IMC para diferentes modelos

$\boldsymbol{Planta}$	$\boldsymbol{Filtro}$	$\boldsymbol{Control}$	$\boldsymbol{K_c}$	$\boldsymbol{\tau_i}$	$\boldsymbol{\tau_d}$	$\boldsymbol{\lambda}$
$\frac{K}{S}$	$\frac{1}{\lambda S+1}$	P	$\frac{1}{K\lambda}$	$-$	$-$	$\lambda \geq 0.2\tau$
$\frac{K}{\tau S+1}$	$\frac{1}{\lambda S+1}$	PI	$\frac{\tau}{K\lambda}$	τ	$-$	$\lambda \geq 0.2\tau$
$\frac{K}{S(\tau S+1)}$	$\frac{1}{\lambda S+1}$	PD	$\frac{1}{K\lambda}$	$-$	τ	$\lambda \geq 0.2\tau$
$\frac{K}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)}$	$\frac{1}{\lambda S+1}$	PID	$\frac{\tau_1+\tau_2}{K\lambda}$	$\tau_1+\tau_2$	$\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$	$\lambda \geq 0.2\tau$
$\frac{K}{\tau^2 S^2+2\xi\tau S+1}$	$\frac{1}{\lambda S+1}$	PID	$\frac{2\xi\tau}{K\lambda}$	$2\xi\tau$	$\frac{\tau}{2\xi}$	$\lambda \geq 0.2\tau$
$\frac{K(1-\beta S)}{\tau^2 S^2+2\xi\tau S+1}$	$\frac{1-\beta S1}{\lambda S+1}$	PID	$\frac{2\xi\tau}{K(\lambda+\beta)}$	$2\xi\tau$	$\frac{\tau}{2\xi}$	$\lambda \geq 0.2\tau$

EJEMPLO 6.9

El modelo de cierto sistema de flujo puede aproximarse al de un sistema de segundo orden sin retardo con función de transferencia:

$$G_p(S) = \frac{12.5}{S^2+6S+25}$$

Obtenga para el sistema un controlador PID con modelo interno. Asuma como periodo de muestreo $T = 0.05\ s$. Resuelva el problema para $\lambda = 0.4\tau$ y $\lambda = 0.8\tau$ y grafique las respuestas ante una entrada en escalón unitario.

SOLUCIÓN: La función de transferencia del sistema se puede escribir en la forma:

$$G_p(S) = \frac{K}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1} = \frac{0.5}{0.04S^2 + 0.24S + 1}$$

Por comparación se obtiene:

$$K = 0.5 \qquad \tau = 0.2\ s \qquad \xi = 0.6$$

a) Los parámetros del controlador con $\lambda = 0.4\tau = 0.08\ s$ son:

$$K_c = \frac{2\xi\tau}{K\lambda} = \frac{2 * 0.6 * 0.2}{0.5 * 0.08} = 6 \quad \tau_i = 2\xi\tau = 2 * 0.6 * 0.2 = 0.24 \quad \tau_d = \frac{\tau}{2\xi} = \frac{0.2}{2 * 0.6} = 0.166$$

El controlador PID discreto tiene por ecuación:

$$D(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)}$$

$$q_o = K_c\left[1 + \frac{T}{2\tau_i} + \frac{\tau_d}{T}\right] = 6\left[1 + \frac{0.05}{2 * 0.24} + \frac{0.166}{0.05}\right] = 26.545$$

$$q_1 = -k_c\left[1 + \frac{2\tau_d}{T} - \frac{T}{2\tau_i}\right] = -6\left[1 + \frac{2 * 0.166}{0.05} - \frac{0.05}{2 * 0.24}\right] = -45.215$$

$$q_2 = \frac{K_c\tau_d}{T} = \frac{6 * 1.66}{0.05} = 19.992$$

La ecuación del controlador es, entonces:

$$D(z) = \frac{26.545z^2 - 45.215z + 19.992}{z(z-1)}$$

b) Los parámetros del controlador con $\lambda = 0.8\tau = 0.16$ son:

$$K_c = \frac{2\xi\tau}{K\lambda} = \frac{2 * 0.6 * 0.2}{0.5 * 0.16} = 3 \quad \tau_i = 2\xi\tau = 2 * 0.6 * 0.2 = 0.24 \quad \tau_d = \frac{\tau}{2\xi} = \frac{0.2}{2 * 0.6} = 0.166$$

Los parámetros del controlador son:

$$q_o = K_c\left[1 + \frac{T}{2\tau_i} + \frac{\tau_d}{T}\right] = 3\left[1 + \frac{0.05}{2 * 0.24} + \frac{0.166}{0.05}\right] = 13.272$$

$$q_1 = -k_c\left[1 + \frac{2\tau_d}{T} - \frac{T}{2\tau_i}\right] = -3\left[1 + \frac{2 * 0.166}{0.05} - \frac{0.05}{2 * 0.24}\right] = -22.607$$

$$q_2 = \frac{K_c\tau_d}{T} = \frac{3 * 1.66}{0.05} = 9.996$$

La ecuación del controlador es, entonces:

$$D(z) = \frac{13.272z^2 - 22.607z + 9.996}{z(z-1)}$$

La figura 6.19 muestra la respuesta del sistema de flujo a un escalón unitario. Como puede verse, para $\lambda = 0.4\tau = 0.08$ la respuesta del sistema es más rápida que para el sistema con $\lambda = 0.8\tau = 0.16$ pero presenta un sobreimpulso considerable (18%). Por lo tanto, cuando se diseñan controladores por el método de control con modelo interno es necesario seleccionar el valor de λ adecuado para que el sistema en lazo cerrado tenga un desempeño adecuado.

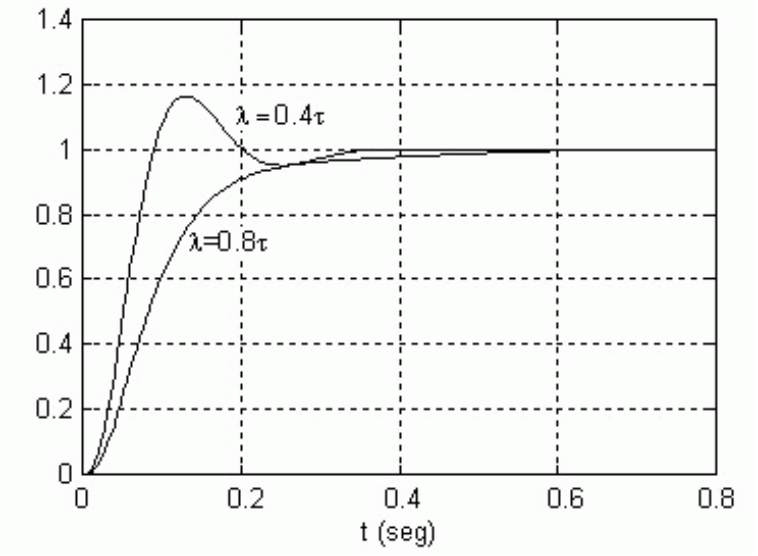


Figura 6.19 Respuesta del sistema con el controlador PID-IMC

ROBLEMAS PROPUESTOS

6.1 En el sistema de la figura 6.20, $G_p(S)$ representa la función de transferencia de un motor de DC controlado por campo. a) Estime el periodo de muestreo adecuado para discretizar el sistema. b) Diseñe un controlador PI y un controlador PID discreto utilizando el método de ganancia límite. c) Diseñe un controlador PI y un controlador PID utilizando el método de Ziegler-Nichols d) Obtenga las respuestas del sistema, con los controladores diseñados, ante un cambio en escalón unitario aplicado en el set-point.

$$G_p(S) = \frac{2684e^{-0.02S}}{S^2 + 100S + 950}$$

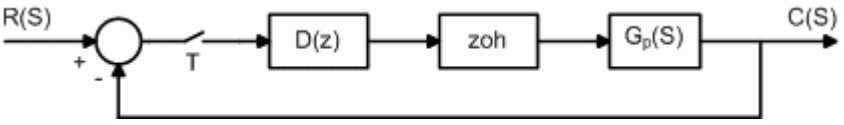


Figura 6.20 Sistema de control para los problemas 6.1 y 6.5

6.2 Un reactor químico se puede modelar como un sistema de primer orden con retardo y función de transferencia:

$$G_p(S) = \frac{0.28e^{-2S}}{16S + 1}$$

Diseñe para el reactor, un controlador PI y un controlador PID digital. Utilice la técnica de Ziegler-Nichols para el diseño y obtenga la respuesta del sistema al escalón unitario con los controladores diseñados. (Tiempos en minutos).

6.3 La temperatura de cierto secador se mide con un sensor cuya escala está graduada de 0 a 150ºC. La temperatura normal de trabajo es 105ºC y se controla manipulando el flujo de vapor mediante una válvula neumática que requiere aire para abrir (3 a 15 PSI). Los datos que se dan a continuación representan la forma como varia la temperatura del secador cuando la presión de aire en el actuador de la válvula se cambia de 8 a 10 PSI. a) Aproxime el modelo del secador a un sistema de primer orden con retardo y determine su función de transferencia. b) Diseñe un controlador PI digital de modo que el sistema en lazo cerrado tenga coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.8$ y tiempo de establecimiento $t_S = 20\,min$.

t (min)	0	1	2	3	4	6	8	10	12
T (ºC)	100	100	100	101	101.8	103.3	104.5	105.5	106.3
t (min)	14	16	18	20	25	30	50	60	70
T (ºC)	107.0	107.5	108.0	108.3	109.0	109.4	110	110	110

6.4 Para el secador del problema anterior, diseñe un controlador PI por cancelación de ceros y polos de modo que su error de estado estable ante una entrada en rampa sea $e_{ss} = 2s^{-1}$.

6.5 Para el sistema de control del motor dado en la figura 6.20 diseñe un controlador a) Deadbeat de orden normal. b) Deadbeat de orden incrementado. Obtenga en, cada caso la respuesta del sistema en lazo cerrado al escalón unitario. Analice la acción del controlador sobre la válvula y corrija si existe, el efecto timbre.

6.6 Repita el problema anterior si la planta a controlar es el reactor químico descrito en el problema 6.2

6.7 El sistema del intercambiador de calor mostrado en la figura 6.10 tiene las siguientes características: la respuesta del intercambiador a un cambio en escalón en el flujo de vapor tiene una ganancia de 5 y una constante de tiempo de 60 seg. La válvula de control es lineal, con ganancia de 0. 1 y constante de tiempo de 4 seg. Se desea implementar un sistema de control digital para el intercambiador a) Dibuje un diagrama de bloques indicando las componentes que debe tener el sistema de control b) Diseñe, para el sistema, un controlador PI de modo que el sistema en lazo cerrado tenga un sobreimpulso máximo del 10% y tiempo de establecimiento de 2 min.

6.8 Para el intercambiador descrito en el problema 6.7, diseñe un controlador Deadbeat de orden normal. Grafique la respuesta del sistema en lazo cerrado ante un cambio en escalón unitario en la referencia. Presenta el controlador efecto timbre sobre el elemento final de control? Si lo presenta, corrija este efecto y obtenga la respuesta del sistema y la acción sobre el elemento final de control, ahora sin efecto timbre.

6.9 El sistema que se muestra en la figura 6.21, se utiliza para refrigerar y controlar la temperatura del producto dentro del tanque, manipulando el flujo de agua fría que pasa por el serpentín. Las condiciones de trabajo del sistema son: temperatura del producto en el tanque 90ºC, flujo del agua de enfriamiento 1200

lt/min, rango del transmisor de temperatura 50ºC a 150ºC, rango del transmisor de flujo 0 a 1400 lt/min. Para diseñar un controlador PI y un controlador PID se realizaron sobre el proceso las siguientes pruebas:

- Con un controlador proporcional convencional con ganancia 5 la temperatura oscila con amplitud constante y periodo de 10 min.
- Con un incremento de 35 lts/min en el flujo de agua de refrigeración la temperatura desciende 6ºC, después de un tiempo largo.

Con los datos anteriores obtenga los parámetros para los controladores digitales pedidos. Asuma que $T = 0.1T_u$.

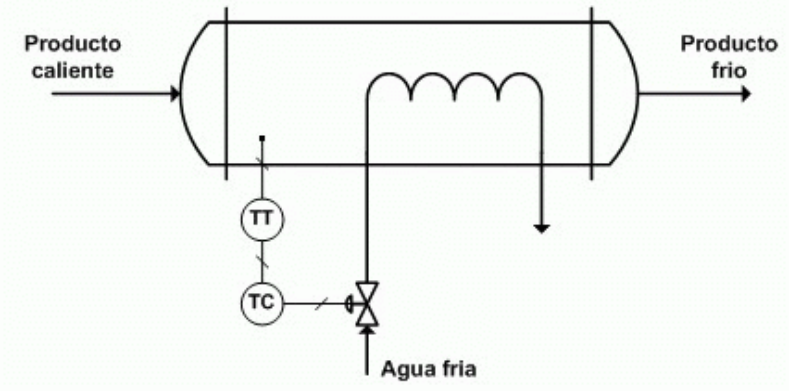


Figura 6.21 Sistema para el problema 6.9

6.10 La función de transferencia de cierto proceso es:

$$G_p(S) = \frac{1}{5S+1}$$

El proceso está en serie con un sensor $G_m(S)$ como se indica en la figura 6.22. Existe la posibilidad de seleccionar la función de transferencia del sensor así:

a) $G_m(S) = e^{-0.2S}$ b) $G_m(S) = \frac{1}{S+1}$ c) $G_m(S) = \frac{e^{-0.1S}}{S+1}$

Diseñe para cada caso: a) un controlador PI por cancelación de ceros y polos b) Un controlador PI de modo que el sistema en lazo cerrado tenga polos ubicados en $z = 0.5$ y $z = 0.2$

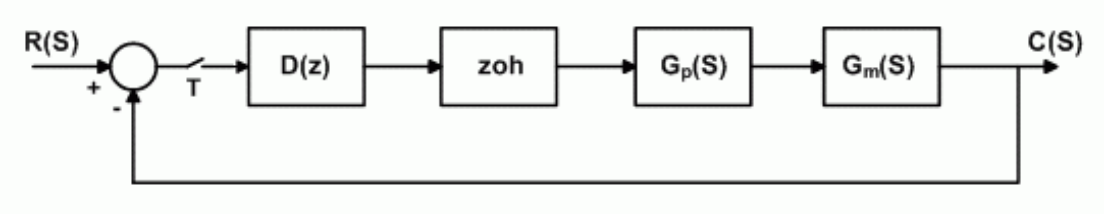


Figura 6.22 Sistema los problemas 6.10 y 6.11

6.11 Suponga que en el sistema de la figura 6.22:

$$G_m(S) = 0.5 \qquad \text{y} \qquad G_p(S) = \frac{0.08e^{-2S}}{S}$$

Diseñe un controlador PI de modo que el sistema tenga polos dominantes de lazo cerrado en $z = 0.5$ y $z = 0.4$. Grafique la respuesta del sistema y la acción del controlador sobre el elemento final de control.

6.12 Un proceso tiene como función de transferencia:

$$G_p(S) = \frac{K_p e^{-\theta S}}{\tau S + 1}$$

El proceso esta precedido por un retenedor de orden cero y un controlador digital $D(Z)$. a) Se requiere que el sistema, en lazo cerrado, tenga como función de transferencia $H(Z)$. Deduzca la función de transferencia del controlador para lograr este objetivo. b) Suponga que se necesita que el sistema, en lazo cerrado, tenga respuesta con oscilaciones muertas (tipo Deadbeat), deduzca una expresión para el controlador con el cual se satisfaga dicha condición.

6.13 La figura 6.23 representa la respuesta, en lazo abierto, de un sistema de control de presión ante un escalón aplicado en la válvula de control. a) Aproxime el modelo del proceso a un sistema de primer orden con retardo. b) Aproxime el modelo del proceso a un sistema de segundo orden con retardo. c) Diseñe un controlador tipo Deadbeat para los modelos obtenidos en los literales a y b. d) Utilice el algoritmo de Dalhin para diseñar el controlador correspondiente a los dos

modelos estimados. e) Con qué controlador y con cuál de los dos modelos se genera un mejor trabajo sobre el elemento final de control en lazo cerrado?

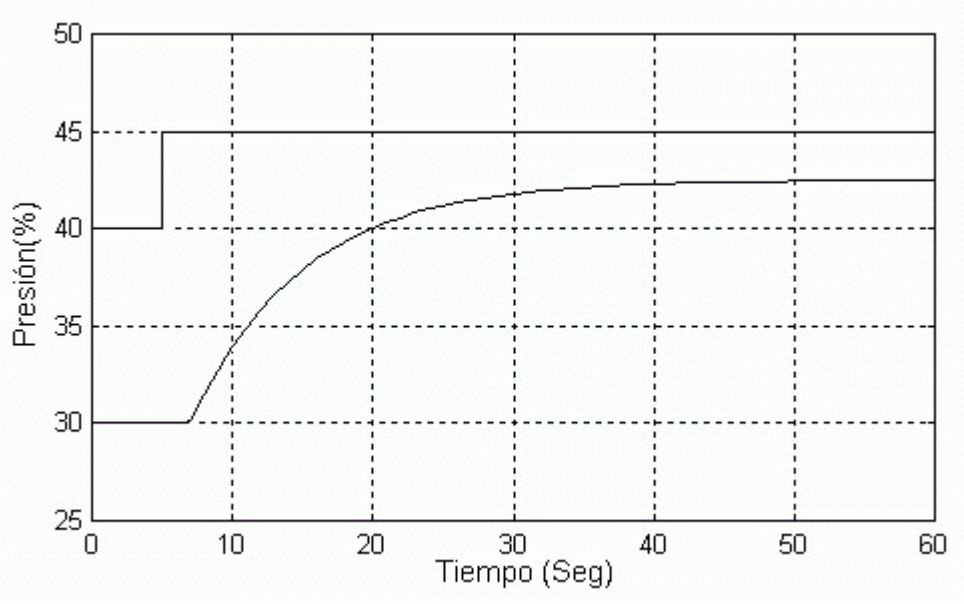


Figura 6.23 Respuesta del sistema para el problema 6.13

6.14 La función de transferencia para el proceso del sistema de control que se muestra en la figura 6.24 está dada por:

$$G_p(S) = \frac{Ke^{-\theta S}}{(\tau_1 S + 1)(\tau_2 S + 1)}$$

En donde la ganancia, las constantes de tiempo y el retardo del proceso son: $K = 1.25\%/\%$, $\tau_1 = 2\ min$, $\tau_2 = 0.8 \min$ y $\theta = 0.4\ min$. a) Discretice el sistema con $T = 0.5\ min$. b) Diseñe un controlador PI utilizando el método de ganancia límite c) Diseñe un controlador tipo Deadbeat. d) Obtenga los parámetros para un controlador tipo Dalhin de modo que el sistema en lazo cerrado tenga una constante de tiempo igual al 60% de su constante de tiempo equivalente en lazo abierto. e) Obtenga la función de transferencia del sistema en lazo cerrado con cada uno de los controladores diseñados y estime su respuesta ante una entrada en escalón aplicada en el set point. Asuma que el sistema está bajo condiciones

de estado estable al 50% del valor máximo de la variable controlada y que el escalón se genera cambiando el set-point del 50% al 60%.

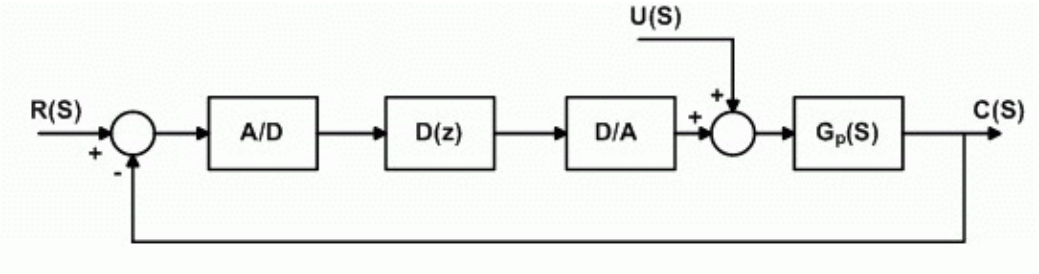


Figura 6.24 Sistema de control para los problemas 6.14 y 6.17

6.15 La figura 6.25 corresponde a la respuesta de un sistema de control de flujo en lazo cerrado. Para obtenerla, se utilizo un controlador PID electrónico con sus acciones integral y derivativa suprimidas y con ganancia proporcional igual a 1.6 a) Estime el modelo SOR correspondiente al sistema b) Diseñe un controlador PI digital por asignación de polos de modo que el sistema, en lazo cerrado tenga un máximo sobreimpulso del 12% y tiempo de establecimiento de 1.2 s. c) Diseñe para el sistema, un controlador tipo Deadbeat d) Simule la respuesta del sistema con cada uno de los controladores diseñados y elimine el efecto timbre si se presenta.

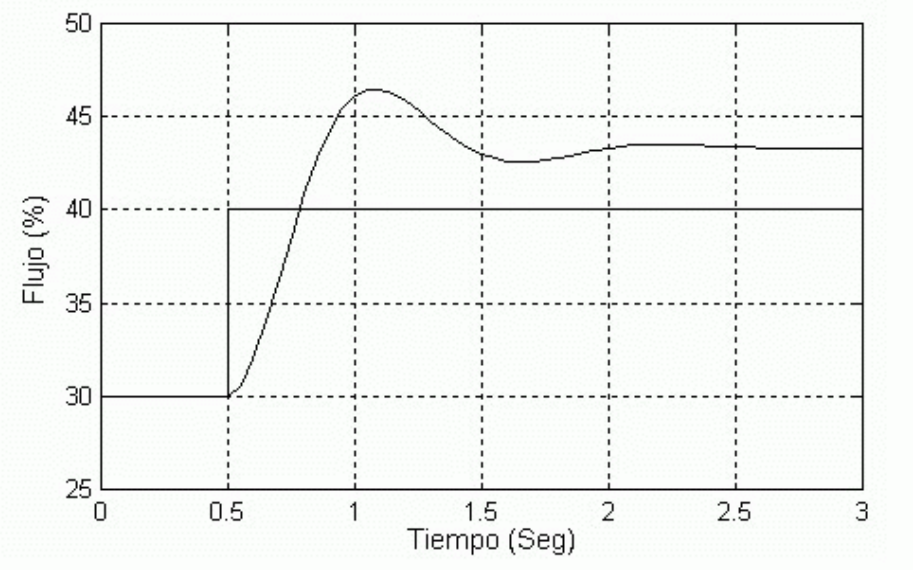


Figura 6.25 Respuesta del sistema para el problema 6.14

6.16 Utilice el modelo que describe la dinámica del sistema de flujo dado en el problema 6.15 y diseñe: a) Un controlador PI y un controlador PID a partir del método de ganancia límite. b) Un controlador PI y un controlador PID utilizando la técnica de Ziegler-Nichols. c) Simule las respuestas del sistema con cada uno de los controladores diseñados y obtenga, por simulación, la acción de cada controlador sobre el elemento final de control.

6.17 Considere el sistema de control presentado en el problema 6.14. a) Obtenga la respuesta del proceso en lazo abierto ante una entrada en escalón unitario y a partir de ella, aproxímelo a un sistema de primer orden con retardo. b) Con el modelo obtenido diseñe un controlador PI utilizando la técnica de Ziegler-Nichols c) Obtenga los parámetros de un controlador PI por el método de ganancia límite d) Calcule un controlador tipo Deadbeat.

6.18 La figura 6.26 corresponde a un sistema de control en cascada. Se desea diseñar los controladores digitales $D_1(z)$ y $D_2(z)$ de modo que el sistema global en lazo cerrado sea estable, que tenga una constante de tiempo igual o menor que el 70% de la suma de las constantes de tiempo correspondientes a $G_1(z)$ y a $G_2(z)$ y error cero ante entradas en escalón. Se sugiere que el controlador $D_1(z)$ sea un controlador PI y que el controlador $D_2(z)$ sea un controlador proporcionalI. Utilice el método que estime conveniente para el diseño de los controladores con el fin de lograr el cumplimiento de las especificaciones dadas. Asuma $T = 1\ s$.

$$G_1(z) = \frac{0.5}{z(z-0.8)} \qquad G_2(z) = \frac{0.4}{z-0.5}$$

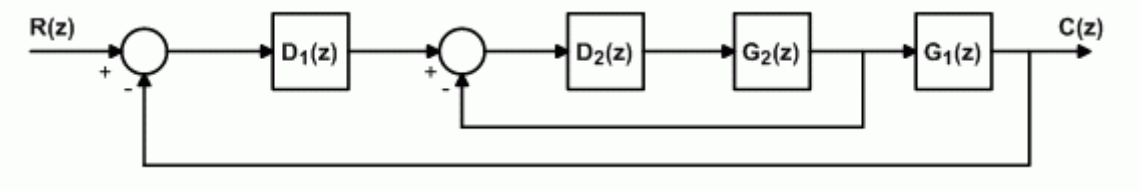


Figura 6.26 Sistema de control en cascada

6.19 La figura 6.27 representa el diagrama en bloques del sistema de control de velocidad de un motor de DC. La dinámica del motor se puede modelar mediante la función de transferencia:

$$G_m(S) = \frac{250000}{(S+300)(S+900)}$$

El sistema se muestrea cada 0.001 seg y la función de transferencia del controlador PI se puede dar como:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{(K_iT + 2K_c)z + (K_iT - 2K_c)}{2(z-1)}$$

Calcular los valores de K_c y de K_i de modo que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones: tiempo de establecimiento menor o igual a 0.03 seg, máximo sobreimpulso menor o igual al 8%, además, el cero del controlador debe cancelar un polo de la planta.

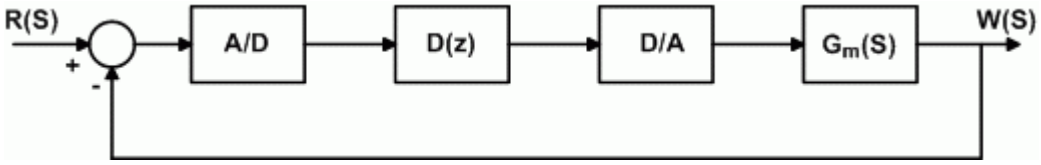


Figura 6.27 Diagrama para el problema 6.19

6.20 El sistema de la figura 6.28 representa un intercambiador de calor con un sistema de calefacción interno no manipulable que calienta un flujo q de agua desde una temperatura $T_i(t)$ a una temperatura $T(t)$.

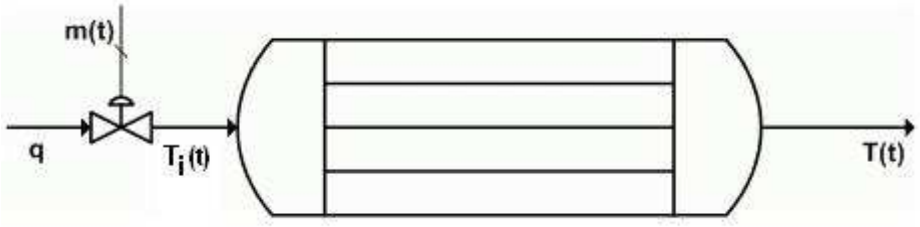


Figura 6.28 Intercambiador para el problema 6.20

Para este sistema se sabe que la relación entre la señal de control aplicada a la válvula de entrada $m(t)$ en % y la temperatura de salida $T(t)$ en $ºC$ (tiempo en minutos) viene dada por:

$$3\frac{dT(t)}{dt} = -6T(t) + 12m(t) + 2T_1$$

Para el análisis del sistema se considera un periodo de muestreo de 0.1 minuto.
a) Dibuje sobre el esquema dado, el sistema de control de temperatura adecuado. b) Suponga que el regulador es de tipo PI, dibuje un diagrama de bloques y calcule la función de transferencia en lazo cerrado despreciando la dinámica del transmisor. c) Diseñe el controlador PI por asignación de polos de modo que el sistema, en lazo cerrado tenga coeficiente de amortiguamiento menor o igual a 0.7 y tiempo de establecimiento de 1.2 min. d) Calcule el error de estado estable frente a un cambio de 0.2 ºC en la temperatura de entrada de líquido.

6.21 La figura 6.29 representa el diagrama en bloques del sistema de control de un motor de DC. Utilizado para controlar la velocidad de una carga. Las ecuaciones que describen la dinámica del motor se pueden resumir así:

$$e_a(t) = Ri_a(t) + L_a\frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t)$$

$$e_b(t) = K_b\omega(t)$$

$$\tau_m(t) = K_m i_a(t)$$

$$\tau_m(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} + \tau_c$$

En donde:

$e_a(t)$: Voltaje aplicado al motor	$R_a = 2.5\Omega$: Resistencia de la armadura
$e_b(t)$: Fuerza contraelectromotriz	$L_a = 2\ mH$: Inductancia de la armadura
$i_a(t)$: Corriente de la armadura $\omega(t)$: Velocidad angular del motor	$K_m = 7.2 \times 10^{-3} Kg.m/A$: Constante de torque del motor
$\tau_m(t)$:Torque del motor	$K_a = 0.04V.s/rad$:Constante de $fcem$
τ_c: Perturbación en torque de la carga	$J = 7.2 \times 10^{-6} Kg.m.s^2/rad$:Inercia del motor

a) Obtenga la función de transferencia $G_m(S) = \omega(S)/E_a(S)$. b) Asuma para el sistema un periodo de muestreo $T = 0.02\ s$ y diseñe para el mismo un controlador tipo Deadbeat y un controlador PI por cancelación de ceros y polos de modo que la constante de error de velocidad sea igual a 0.2.

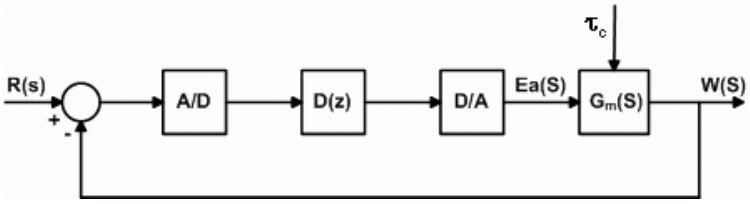


Figura 6.29 Sistema para el problema 6.21

6.22 La figura 6.30 muestra el diagrama de instrumentación para el control digital de la temperatura de un horno. El sistema se muestreó cada 0.1 min. La dinámica de los elementos componentes del sistema se puede modelar así: Horno: sistema de segundo orden. Ganancia 0.6, constantes de tiempo de 0.5 min y 1.25 min y retardo de 0.2 min. Válvula: Sistema de primer orden. Ganancia 1 y constante de tiempo 0.2 min. Medición: sistema con ganancia unitaria. Diseñe para el sistema: a) Un controlador Deadbeat b) Un controlador PI por asignación de polos de modo que el sistema en lazo cerrado tenga máximo sobreimpulso menor o igual al 10% y tiempo de establecimiento de 1.5 min.

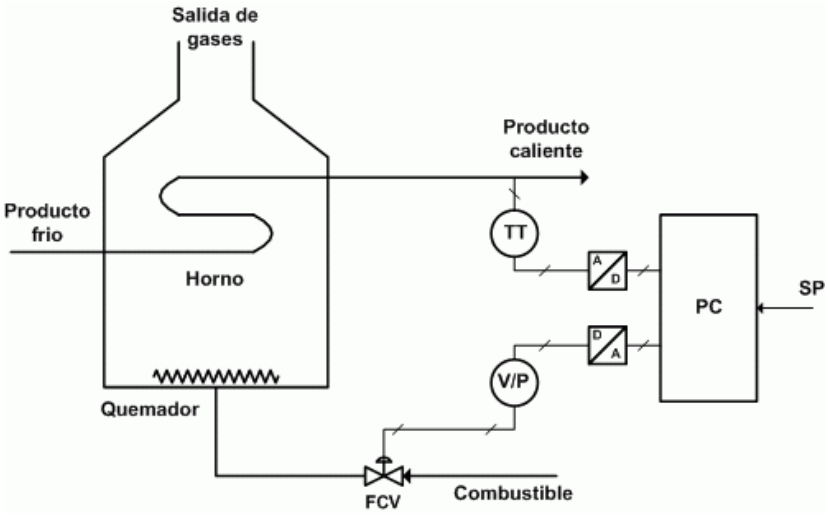


Figura 6.30 Sistema de control para la temperatura del horno

6.23 La dinámica de un intercambiador de calor se puede describir mediante un modelo de segundo orden de la forma:

$$G_p(S) = \frac{e^{-\theta S}}{(aS+1)(bS+1)}$$

Asumiendo $\theta = 5\,s,\ a = 60\,s,\ b = 10\,s,$ período de muestreo $T = 5\,s,$ y que el sistema está precedido por un retenedor de orden cero obtener: a) La función de transferencia de pulso del intercambiador b) Un controlador PI por cancelación de ceros y polos de modo que el error de estado estable del sistema en lazo cerrado, ante una rampa unitaria sea ≤ 2. c) Un controlador PI utilizando el método de ganancia límite. d) Un controlador tipo Dalhin de modo que el sistema en lazo cerrado tenga constante de tiempo igual a 40 s. e) Un controlador Deadbeat de orden normal.

6.24 Considere el sistema de control digital dado en la figura 6.31. La planta corresponde a la dinámica de un sistema de calentamiento de un horno para cocción de cerámica. a) Diseñe, utilizando el método de asignación y cancelación de polos, un controlador PI de modo que el sistema, en lazo cerrado, tenga un polo dominante en z=0.6. b) Diseñe un controlador PI por el método de Ziegler-Nichols. c) Obtenga un controlador PI por asignación de polos de modo que el sistema tenga tiempo de establecimiento de 3 min y coeficiente de amortiguamiento de 0.7. Seleccione para el cálculo de los controladores el periodo de muestreo adecuado.

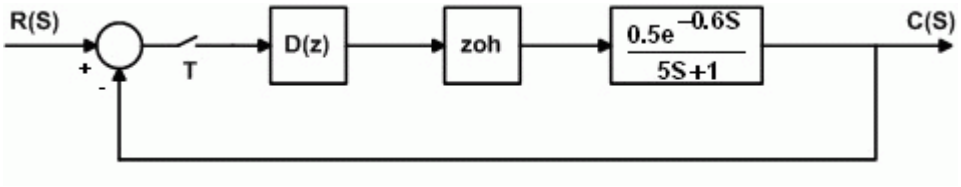


Figura 6.31 Sistema de Control para el problema 6.24

6.25 Para el sistema del problema 6.24 asuma que el periodo de muestreo es de 0.6 min. y diseñe un controlador PI utilizando a) El método de Ciancone-Marlin. b)

El método de Cohen-Coon. c) El método de control con modelo interno con $\lambda = 0.5\tau$. d) Obtenga la respuesta del sistema al escalón unitario con el controlador diseñado y compare el desempeño de cada controlador.

6.26 En el sistema de control mostrado en la figura 6.32 la función de transferencia del proceso $G_p(S)$ se obtuvo mediante identificación no paramétrica aproximando su dinámica a un sistema de primer orden y a un sistema de segundo orden respectivamente. Los resultados obtenidos fueron:

$$G_p(S) = \frac{1.25e^{-1.5S}}{12S+1} \qquad G_p(S) = \frac{0.05}{S^2 + 0.48S + 0.04} \qquad T = 2\ s.$$

Diseñe para cada uno de los modelos un control PID utilizando a) El método de Ciancone-Marlin. b) El método de Cohen-Coon. c) El método de control con modelo interno para este caso seleccione el valor de λ adecuado.

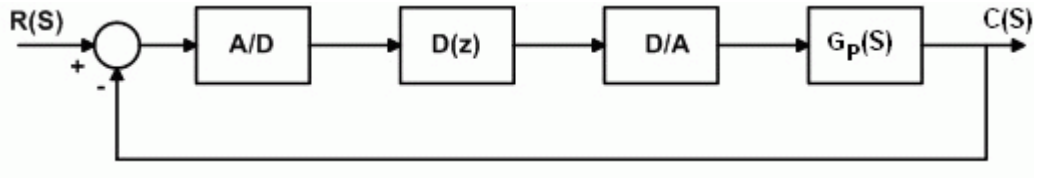


Figura 6.32 Sistema para el problema 6.26

6.27 Asuma que la dinámica de un determinado proceso industrial se puede modelar mediante la función de transferencia:

$$G_p(S) = \frac{K}{\tau^2 S^2 + 2\xi\tau S + 1}$$

El proceso se va a controlar con un controlador PID ideal con función de transferencia:

$$G_c(S) = K_c\left[1 + \frac{1}{\tau_i S} + \tau_d S\right] = \frac{K_c}{\tau_i}\left[\frac{\tau_i\tau_d S^2 + \tau_i S + 1}{S}\right]$$

a) Utilice el procedimiento de diseño propuesto para un controlador con modelo interno y obtenga los parámetros K_c , τ_i y τ_d del controlador en función de los

parámetros K, ξ y τ del proceso y λ del filtro $F(S)$. De que orden seleccionaría el filtro $F(S)$?. b) Si $\tau = 5\,\text{min}$, $\xi = 0.8$ y $K = 1.5$ obtenga la ecuación del controlador PID discreto y la respuesta del sistema a un escalón unitario con $\lambda = 0.5\tau$ y $\lambda = \tau$

6.28 Sea el tanque con agitador representado en la figura 6.33.

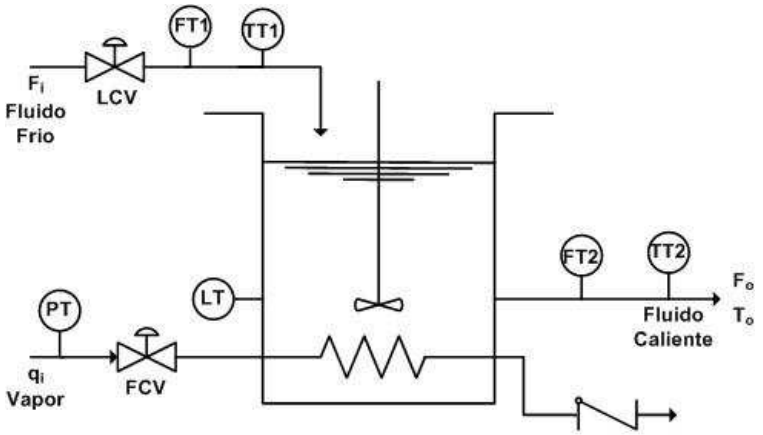


Figura 6.33 Tanque para el problema 6.28

El objetivo es controlar la temperatura T_o del fluido de salida f_o, manipulando el caudal de vapor q_i que pasa a través del serpentín. Se debe controlar también el nivel del tanque manipulando el flujo de entrada f_i. Se dispone de sensores para medir el nivel, el flujo de entrada y el flujo de salida del tanque y las temperaturas de entrada y de salida del fluido. Se ha observado gran variabilidad en la temperatura del fluido de entrada.

Mediante una serie de experiencias llevadas a cabo en el entorno de las condiciones nominales de operación, se han obtenido las funciones de transferencia que se presentan a continuación (tiempo en segundos):

$$\frac{Temperatura\ del\ tanque\ (\%)}{\text{Flujo de vapor }(\%)} = \frac{2.5e^{-20.3S}}{75.4S+1}$$

$$\frac{Nivel\ del\ tanque\ (\%)}{\text{Flujo de entrada }(\%)} = \frac{1.25e^{-4.2S}}{37.4S+1}$$

a) Obtenga un diagrama de instrumentación para el proceso incluyendo todos los componentes necesarios para realizar el control del mismo. b) Dibuje un diagrama de bloques del proceso completo identificando todas las variables significativas (manipuladas, controladas y perturbaciones a la entrada y a la salida). b) Utilice el método IMC y diseñe controladores PI para regular el nivel y la temperatura del tanque. c) Utilice el método de cancelación y asignación de polos para el diseño de los controladores propuestos en el literal anterior. d) Que solución se podría dar para que las variaciones de la temperatura en el flujo de entrada no afecten la temperatura de salida del fluido?

REFERENCIAS

[6.1] Iserman, Rolf. *Digital Control Systems*. Springer Verlag. Heidelberg.1981.

[6.2] Smith, C. Corripio, A. *Control Automático de Procesos*. Limusa. 1991.

[6.3] Ogata, Katsuhico. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall. 1996.

[6.4] Smith, C. Corripio, A. *Control Automático de Procesos*. Limusa. 1991.

[6.5] Warwick and Rees. *Industrial Digital Control Systems*. Short Run Press. Londres. 1988.

[6.6] Iserman, Rolf. *Digital Control Systems*. Springer Verlag. Heidelberg.1981.

[6.7] Iserman, Rolf. *Digital Control Systems*. Springer Verlag. Heidelberg, 1981.

[6.8] Iserman, Rolf. *Digital Control Systems*. Springer Verlag. Heidelberg, 1981.

[6.9] Ogata, Katsuhico. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall. México 1996.

[6.10] Ciancone, R. Marlin, T. *Tune Controllers to Meet Plant Objectives*. Control 1992

[6.11] Cohen, G. Coon, G. *Theoretical consideration of retarded control*. Trans. A.S.M.E. Vol. 75 Nº 1. 1953.

[6.12] Rivera, D., Morari, M. & Stogestad, S. *Internal model control. PID Controller Design*. 1985

.

CAPITULO SIETE

DISEÑO DE COMPENSADORES DIGITALES

Un sistema de control se diseña para que cumpla con funciones específicas determinadas por las condiciones propias del proceso a controlar. Las condiciones exigidas a un sistema de control, se denominan especificaciones de funcionamiento. Estas especificaciones son únicas para cada proceso en particular y en términos generales se refieren a exactitud, estabilidad relativa y velocidad de respuesta.

Si las especificaciones de funcionamiento se expresan en términos de parámetros en el dominio del tiempo, como tiempo de establecimiento, tiempo de pico, máximo sobreimpulso etc. Se utiliza el método del lugar geométrico de las raíces para realizar el diseño.

Si las especificaciones de funcionamiento se expresan en términos de condiciones en el dominio de la frecuencia, como margen de fase, ancho de banda, pico de resonancia etc., se utiliza el método de respuesta en frecuencia para realizar el diseño.

Finalmente, si el diseño se realiza a partir de un índice de comportamiento y restricciones impuestas al sistema con el fin de obtener un sistema de control óptimo con respecto al índice considerado, es necesario utilizar métodos de diseño en el espacio de estado o técnicas de control óptimo.

La mayoría de los métodos de diseño de compensadores se basan en el diseño de una configuración fija, en este caso, el diseñador decide la configuración básica del sistema completo y el lugar en donde estará colocado el compensador en relación con el proceso controlado. [7.1]

De acuerdo a la posición del compensador, la compensación puede ser:

Compensación en serie: En este caso, el compensador $D(z)$ se coloca en serie con el proceso $G_p(S)$ que se desea controlar como se indica en la figura 7.1a.

Compensación de realimentación: En este caso, el compensador $D(z)$ se ubica en la trayectoria menor de realimentación como se indica en la figura 7.1b

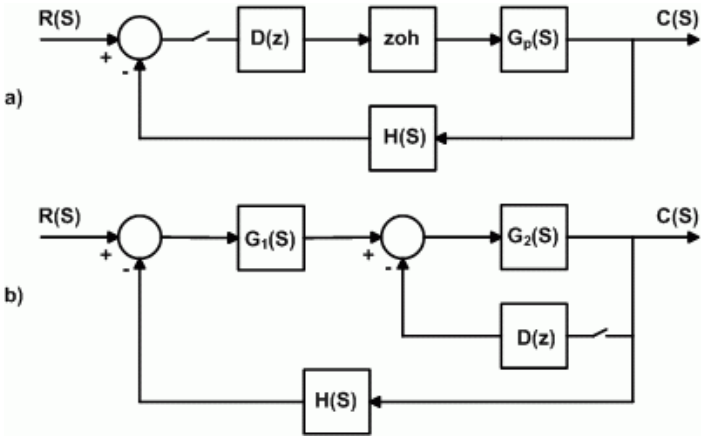


Figura 7.1 a) Compensación en serie. b) Compensación de realimentación

Para el sistema de la figura 7.1a, la función de transferencia de pulso en lazo cerrado es:

$$G_w(S) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G_p(z)}{1 + D(z)G_p(z)} \qquad 7.1$$

La ecuación característica es:

$$1 + D(z)G_p(z) = 0 \tag{7.2}$$

Para el sistema de la figura 7.1b se obtiene:

$$C(z) = \frac{RG_1G_{2(z)}}{1 + G_1G_2H_1(z) + D(z)G_2H_2(z)} \tag{7.3}$$

La ecuación característica de este sistema es:

$$1 + G_1G_2H_1(z) + D(z)G_2H_2(z) = 0 \tag{7.4}$$

El compensador más sencillo es el representado por un sistema de primer orden y su función de transferencia de pulso se puede expresar como:

$$D(z) = \frac{K(z + a)}{z + b} \tag{7.5}$$

En donde k, a y b son los parámetros a diseñar.

Si se precisa de un compensador, para que el sistema cumpla con las especificaciones de comportamiento, el diseñador debe implementar un dispositivo físico que tenga la misma función de transferencia del compensador (en el caso de sistemas continuos) o generar el software que resuelva correctamente la ecuación de diferencias que describe al compensador (en el caso de sistemas discretos).

Entre los tipos de compensadores más utilizados están: compensadores de adelanto, compensadores de atraso, compensadores de atraso-adelanto y compensadores con realimentación de velocidad (tacómetros).

Compensador de Adelanto: Este tipo de compensador tiene la característica de que, para una entrada senoidal $x(t)$, la salida del compensador $y(t)$, también es senoidal pero con adelanto en el ángulo de fase. La compensación en adelanto permite una mejora considerable en la respuesta transitoria y una pequeña modificación en la exactitud del sistema pero, puede acentuar los efectos del ruido a alta frecuencia.

Compensador de Atraso. Este tipo de compensador tiene la característica de que, para una entrada senoidal $x(t)$, la salida del compensador $y(t)$, también es senoidal pero con atraso en el ángulo de fase. La compensación de atraso permite una mejora considerable en la exactitud del sistema, suprime los efectos del ruido a altas frecuencias pero, hace más lenta la respuesta del sistema.

Compensación de Atraso-Adelanto. Este tipo de compensador combina las características de los compensadores de adelanto y las de los compensadores de atraso, es decir, aumenta el ancho de banda y mejora la velocidad de respuesta y la exactitud del sistema.

7.1 DISEÑO DE COMPENSADORES DIGITALES UTILIZANDO TECNICAS DE RESPUESTA DE FRECUENCIA

Para utilizar esta técnica, las especificaciones de funcionamiento del sistema se deben dar en términos de margen de fase, margen de ganancia, amplitud del pico de resonancia, ancho de banda y constantes de error estático.

Para diseñar el compensador en el domino de la frecuencia se utilizan, básicamente, los diagramas de Bode, por lo tanto, la función de transferencia del compensador se debe trabajar en el plano w.

Para transformar $D(z)$ en $D(w)$ se utiliza la transformación bilineal:

$$D(w) = D(z)\Big|_{z=\frac{1+Tw/2}{1-TW/2}} \tag{7.6}$$

Como se indicó anteriormente, $D(z)$ es de primer orden, entonces $D(w)$ también lo será y se puede asumir que es de la forma:

$$D(w) = \frac{K_c w_p (w + w_o)}{w_o\left(w + w_p\right)} \tag{7.7}$$

En donde w_0 es la ubicación del cero y w_p es la ubicación del polo en el plano w.

La ganancia DC del controlador, se calcula haciendo $z = 1$ en la ecuación 7.5 o haciendo $w = 0$ en la ecuación 7.7.

$$K_{DC} = \lim_{z\to 1} \frac{K_c(z+a)}{z+b} = \lim_{w\to 0} \frac{K_c w_p (w + w_o)}{w_o\left(w + w_p\right)} = K_c \tag{7.8}$$

Para realizar el compensador, su función de transferencia debe expresarse en función de z como en la ecuación 7.5, es decir:

$$D(z) = \left.\frac{K_c w_p (w + w_o)}{w_o\left(w + w_p\right)}\right|_{w=\frac{2}{T}*\frac{z-1}{z+1}} \tag{7.9}$$

Comparando las ecuaciones 7.5 y 7.9 se obtiene:

$$K = \frac{K_c w_p (2 + T w_o)}{w_o (2 + T w_p)} \qquad a = \frac{T w_o - 2}{T w_o + 2} \qquad b = \frac{T w_p - 2}{T w_p + 2} \qquad 7.10$$

El compensador dado por la ecuación 7.7 se clasifica según la posición relativa que ocupen el cero y el polo así: si $w_o < w_p$ el compensador es de adelanto pero, si $w_o > w_p$ el compensador es de atraso. [7.2]

7.1.1 Diseño de un Compensador de Adelanto Utilizando Diagramas de Bode: La función de transferencia en el plano w de este tipo de compensador corresponde a la dada en la ecuación 7.7, con la condición de que $w_o < w_p$. De la ecuación 7.7 se obtiene:

$$D(jv) = \frac{K_c w_p (jv + w_o)}{w_o (jv + w_p)} = \frac{K_c (1 + jv/w_o)}{(1 + jv/w_p)} \qquad 7.11$$

El ángulo de fase para el compensador está dado por:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{w_o}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v}{w_p}\right) \qquad 7.12$$

La frecuencia v_m a la cual se presenta el máximo adelanto de fase se obtiene a partir de la ecuación 7. 12 así:

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{\frac{1}{w_0}}{1 + \frac{v^2}{w_o^2}} - \frac{\frac{1}{w_p}}{1 + \frac{v^2}{w_p^2}} = 0$$

Al resolver la ecuación anterior, se obtiene que $v_m = \sqrt{w_o w_p}$. Por lo tanto, el desfase máximo que produce el compensador es:

$$\theta_m = \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{w_p}{w_o}}\right] - \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{w_o}{w_p}}\right] \qquad 7.13$$

Tomando tangente a lado y lado de la ecuación 7.13, se obtiene:

$$\tan(\theta_m) = \frac{w_p - w_o}{2\sqrt{w_p w_o}} \qquad sin(\theta_m) = \frac{w_p - w_o}{w_p + w_o} \qquad 7.14$$

Utilizando la ecuación 7.11 resulta:

$$|D(jv_m)| = K_c \sqrt{\frac{1 + w_p/w_o}{1 + w_o/w_p}} = K_c \sqrt{\frac{w_p}{w_o}} \qquad 7.14a$$

La figura 7.2 muestra las características de repuesta de frecuencia del compensador de adelanto.

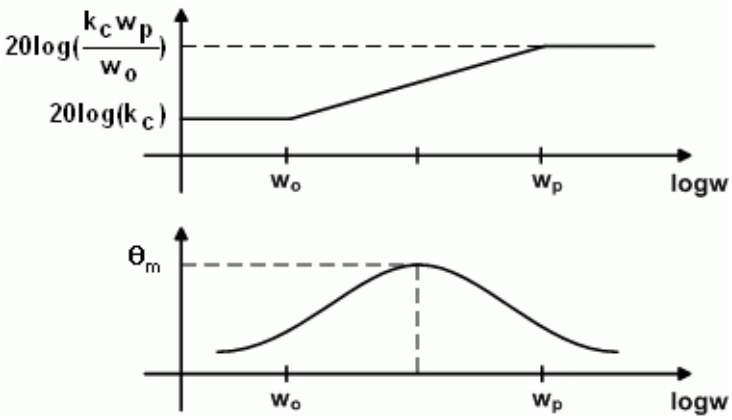


Figura 7.2 Respuesta de frecuencia del compensador de adelanto

La figura 7.3 muestra la relación entre el ángulo θ_c del compensador de adelanto y la raíz del cociente w_p/w_o.

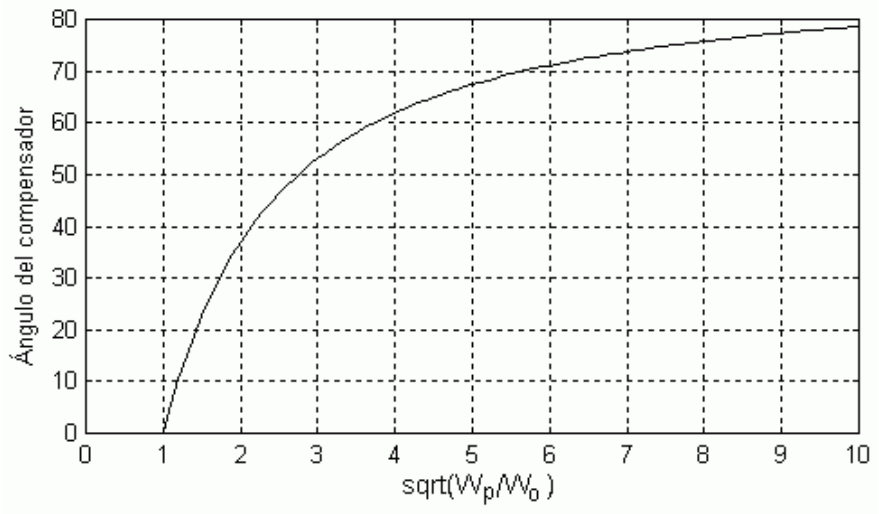


Figura 7.3 Variación del ángulo de fase en el compensador de adelanto

La ecuación característica del sistema dado en la figura 7.1a con $H(S) = 1$ es:

$$1 + D(z)G_p(z) = 0 \qquad 7.15$$

La misma ecuación característica en el plano w es:

$$1 + D(w)G_p(w) = 0 \tag{7.16}$$

Para alguna frecuencia v, la magnitud y el ángulo de la ecuación 7.16 deben cumplir con:

$$|D(jv)|\left|G_p(jv)\right| = 1 \qquad |D(jv)| = \frac{1}{\left|G_p(jv)\right|} \tag{7.17}$$

$$\measuredangle D(jv)G_p(jv) = -180^o + \phi_{PM} \tag{7.18}$$

En donde ϕ_{PM} es el margen de fase deseado para el diseño del sistema.

De la ecuación 7.18, el ángulo de fase correspondiente al compensador es:

$$\measuredangle D(jv) = \theta_c = -180^o + \phi_{PM} - \measuredangle G_p(jv) \tag{7.19}$$

Para el compensador de adelanto, se puede tomar como función de transferencia [7.3]

$$D(w) = \frac{K_c[1 + (a/K_c)w]}{1 + bw} \tag{7.20}$$

Esta ecuación corresponde a la ecuación 7.7 en donde K_c representa la ganancia DC del controlador y:

$$w_o = \frac{K_c}{a} \qquad w_p = \frac{1}{b} \tag{7.21}$$

En la ecuación 7.20 existen tres parámetros desconocidos: K_c, a y b. Resolviendo las ecuaciones 7.17 y 7.19 para a y para b en función de K_c y v se obtiene:

$$a = \frac{1 - K_c|G(jv)|cos(\theta_c)}{v|G(jv)|sin(\theta_c)} \tag{7.22}$$

$$b = \frac{cos(\theta_c) - K_c|G(jv)|}{vsin(\theta_c)} \tag{7.23}$$

En el caso de que la realimentación $H(S)$ no sea unitaria, $|G(jv)|$ se reemplaza por $|GH(jv)|$ en las ecuaciones 7.17, 7.22 y 7.23.

El diseño del compensador requiere que se asuma el margen de fase deseado para el sistema y un valor adecuado para la ganancia K_c. El valor de K_c se determina, por lo general, a partir del error de estado estable permitido para el sistema.

Como el compensador es de adelanto, el ángulo de fase θ_c proporcionado por él debe ser positivo, además, para asegurar estabilidad, el parámetro b debe ser

positivo. Teniendo en cuenta estas restricciones, los parámetros del compensador deben estimarse de modo que se cumplan las siguientes restricciones:

a) $\measuredangle G(jv) < -180^o + \phi_{PM}$ Para que $\theta_c > 0$ (Ecuación 7.19)

b) $|G(jv)| < \dfrac{1}{K_c}$ De la ecuación 7.17 y figura 7.2

c) $\cos(\theta_c) > K_c|G(jv)|$ Para que $b > 0$ (Ecuación 7.23)

En las ecuaciones 7.17, 7.18, 7.19, 7.22 y 7.23, la frecuencia v tiene la misma connotación que en la ecuación 4.66 es decir:

$$v = \frac{2}{T}\tan\frac{wT}{2} \qquad 7.24$$

EJEMPLO 7.1

La figura 7.4a representa el sistema de control de dos tanques en cascada y la figura 7.4b su diagrama de bloques correspondiente. Diseñar para el sistema, un compensador de adelanto $D(z)$, de modo que el margen de fase del sistema sea de 50º y que el coeficiente de error estático de velocidad sea 0.1 seg^{-1}. Que margen de ganancia se obtiene con el compensador diseñado? Asuma que los tiempos están en minutos y que:

$$G_p(S) = \frac{0.1}{S(10S+1)(5S+1)}$$

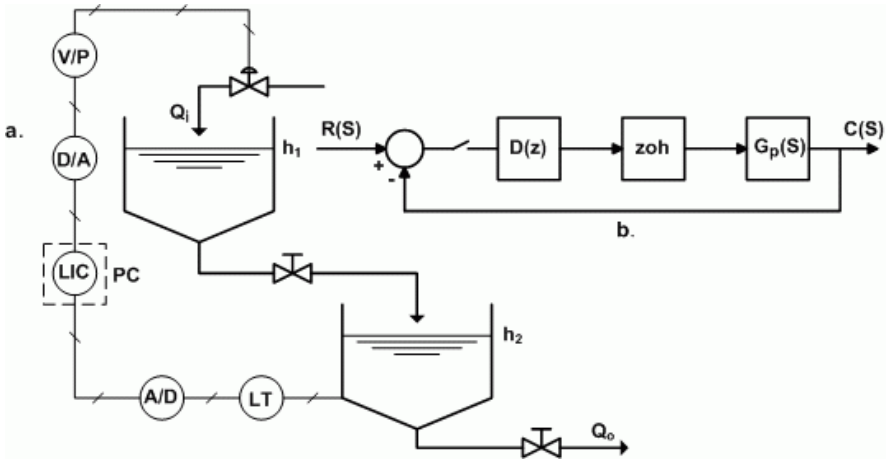


Figura 7.4 Sistema de control para dos tanques en cascada

SOLUCIÓN: El ancho de banda del sistema en lazo cerrado es $w_c = 0.126\ rad/min$. Para el período de muestreo se toma el criterio: $8w_c \leq w_s \leq 12w_c$

Haciendo $w_s = 12w_c = 1.512\ rad/min$, resulta: $T = 2\pi/w_s = 4.15$ Para simplificar se puede tomar $T = 4\ min$ con lo cual se obtiene:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad G_p(S) = \frac{0.1}{S(10S+1)(5S+1)}$$

$$HG(z) = \frac{0.01598(z^2 + 2.9956z + 0.5488)}{(z-1)(z-0.6703)(z-0.4493)}$$

Para satisfacer el requerimiento de coeficiente estático de error se sabe que:

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\,D(z)HG(z)$$

Con $K_v = 0.1,\ T = 4\ min$, utilizando la ecuación 7.10 para $D(z)$ y con el $HG(z)$ estimado, se obtiene que $K_c = 1$.

La respuesta en frecuencia de HG(jv) se da a continuación. Para establecer la relación entre v y w ver la ecuación 7.24

w	0.01	0.06	0.08	0.10	0.12	0.16	0.20	0.26	0.3	0.4	0.6
v	0.01	0.0603	0.0807	0.1014	0.1224	0.1657	0.2114	0-286	0.342	0.5148	1.286
$\lvert HG(jv)\rvert$	9.937	1.365	0.902	0.6282	0.4531	0.2543	0.154	0.080	0.552	0.0246	0.0076
db	19.945	2.706	-0.892	-4.037	-6.876	-11.89	-16.25	-21.88	-25.16	-32.18	-42.43
θ_c	-99.7	-144.5	-159.6	-173.0	- 184.9	-205.0	-221.4	-241.3	-252.5	-276.0	- 316.6

La figura 7.5 muestra el diagrama de Bode del sistema sin compensar. De él se deduce que $MG = 5.7db$, $\phi_{PM} = 24^o$, $w_c = 0.074\ rad/min$ y $w_\pi = 0.111\ rad/min$. Teniendo en cuenta que el margen de fase pedido es $\phi_{PM} = 50^o$ y que $K_c = 1$, para el diseño del compensador se deben cumplir las siguientes condiciones:

$a)\ \measuredangle HG(jv) < -180^o + \phi_{PM} \qquad \measuredangle HG(jv) < -130^0$

$b)\ |HG(jv)| < \frac{1}{K_c} \qquad |HG(jv)| < 1$

Las dos condiciones anteriores se satisfacen al seleccionar $v = 0.1014\ rad/min$ en la tabla de respuesta de frecuencia del sistema discreto. Para este valor de v se tiene: $HG(jv) = 0.682\measuredangle -173^o$.

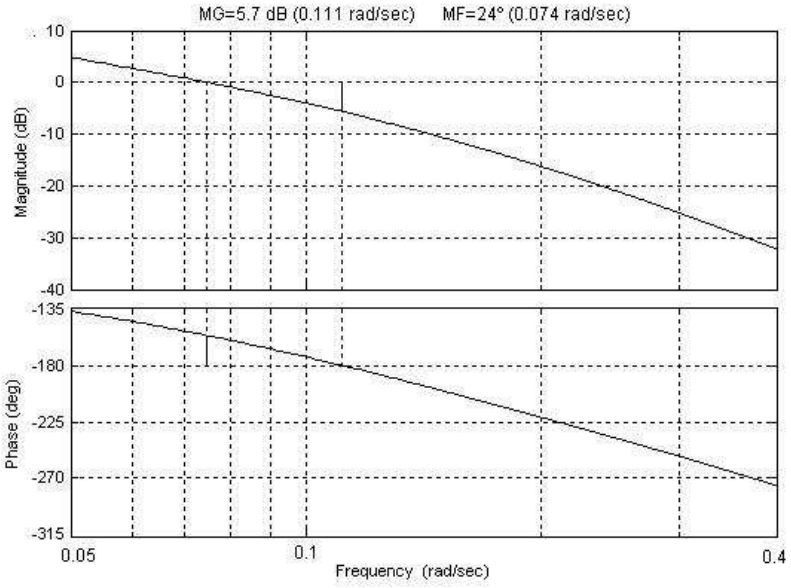


Figura 7.5 Diagrama de Bode del sistema sin compensar

El ángulo de fase correspondiente al compensador es, según la ecuación 7.19:

$$\theta_c = -180^o + 50^o + 173^o \qquad \theta_c = 43^o$$

c) La tercera condición que se debe cumplir es:

$$\cos(\theta_c) > K_c|HG(jv)| \qquad \cos(43^o) > 0.6282 \qquad 0.7313 > 0.628$$

Una vez cumplidas las tres condiciones, se evalúan los parámetros a y b, utilizando las ecuaciones 7.22 y 7.23 así:

$$a = \frac{1 - K_c|G(jv)|cos(\theta_c)}{v|G(jv)|sin(\theta_c)} = \frac{1 - 0.6282 * \cos(43^o)}{0.1014 * 0.6282 * \sin(43^o)} \qquad a = 12.443$$

$$b = \frac{cos(\theta_c) - K_c|G(jv)|}{vsin(\theta_c)} = \frac{\cos(43^o) - 0.6282}{0.1014 * \sin(43^o)} \qquad b = 1.4916$$

$$w_o = \frac{K_c}{a} = 0.0803 \qquad w_p = \frac{1}{b} = 0.6704$$

Reemplazando en la ecuación 7.10 los valores estimados para w_o y w_b se obtiene:

$$D(z) = \frac{4.1393(z - 0.7232)}{z + 0.14559}$$

$$D(z)HG(z) = \frac{0.06614(z - 0.7232)(z^2 + 2.9956z + 0.5488)}{(z - 1)(z - 0.6703)(z - 0.4493)(z + 0.14559)}$$

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)D(z)HG(z) = 0.1 \qquad (K_v \quad \text{pedido})$$

La figura 7.6 representa el diagrama de Bode del sistema compensado. De él se obtiene: $MG = 9.51\,dB$, $\phi_{PM} = 50^o$, $v_c = 0.1\,rad/min$ y $v_\pi = 0.23\,rad/min$, con estos valores se satisfacen las especificaciones dadas

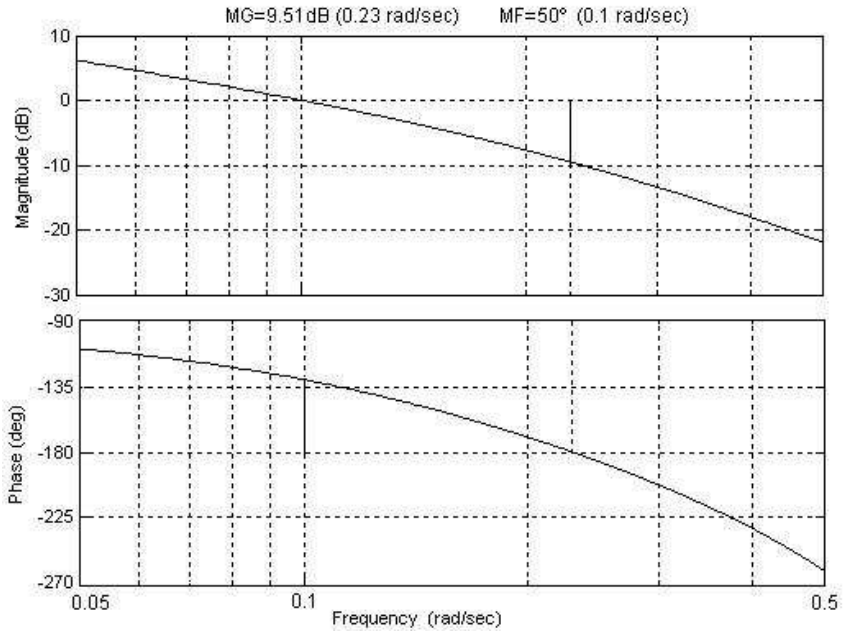


Figura 7.6 Diagrama de Bode para el sistema compensado

La figura 7.7 representa la respuesta del sistema compensado ante un cambio en escalón unitario aplicado en la referencia.

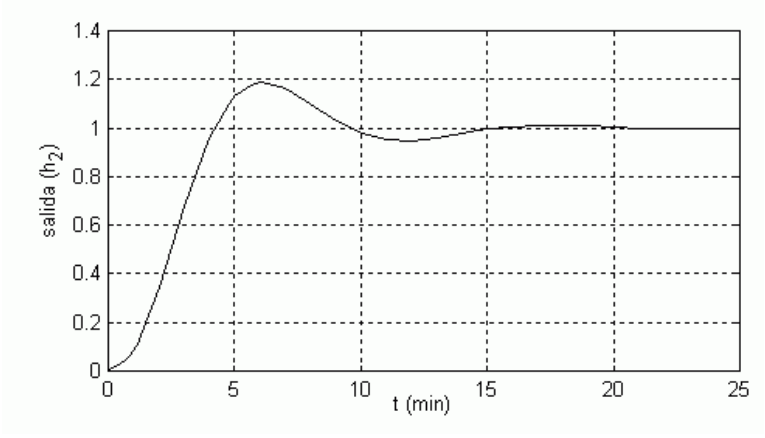


Figura 7.7 Respuesta del sistema compensado ante un escalón unitario.

Método alternativo: a continuación se presenta un método alternativo para diseñar el compensador de adelanto utilizando técnicas de respuesta de frecuencia:

a) Obtener la función de transferencia de pulso $HG(z)$ de la planta y transformar $HG(z)$ en una función $HG(w)$, utilizando la transformada bilineal:

$$HG(w) = HG(z)\Big|_{z=\frac{1+Tw/2}{1-Tw/2}} \qquad 7.25$$

En donde T es el tiempo de muestreo.

b) Determinar el valor de la ganancia K que satisfaga los requerimientos del coeficiente de error estático dado.

c) Con la ganancia K obtenida, trazar el diagrama de Bode y calcular, a partir de él, el margen de ganancia y el margen de fase del sistema.

d) Asumir para el compensador una función de transferencia unitaria para el rango de baja frecuencia y utilizar las técnicas de diseño convencional, aplicadas a los sistemas continuos, para determinar el polo y el cero del compensador.

Para el diseño, la función de transferencia del compensador se puede como:

$$D(w) = K_c\left[\frac{w + w_o}{w + w_o/\alpha}\right] = K\left[\frac{\frac{w}{w_o} + 1}{\frac{\alpha w}{w_o} + 1}\right] \qquad 7.26$$

En donde $K = K_c\alpha$ y el ángulo de fase máximo es:

$$\sin(\theta_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad 7.27$$

(Ver ecuaciones 7.7 y 7.14)

e) Transformar la función de transferencia del controlador $D(w)$ en $D(z)$ utilizando la transformada bilineal:

$$D(z) = D(w)\Big|_{w=\frac{2}{T}*\frac{z-1}{z+1}} \qquad 7.28$$

Con la cual se obtiene que:

$$D(z) = \frac{K(Tw_o + 2)}{Tw_o + 2\alpha}\left[\frac{z + \frac{Tw_o - 2}{Tw_o + 2}}{z + \frac{Tw_o - 2\alpha}{Tw_o + 2\alpha}}\right] \qquad 7.29$$

EJEMPLO 7.2

La figura 7.8 representa el diagrama en bloques de un sistema de control de posición del eje de un motor. La entrada al sensor es en grados y su salida es en voltios. El movimiento del eje está restringido a ±150º. Diseñar el compensador $D(z)$ de modo que el sistema controlado tenga: margen de fase mínimo de 50º, margen de ganancia mayor de 8 db y error de estado estable debido a una entrada rampa unitaria igual a 0.2º. Grafique la respuesta del sistema si el valor de la referencia pasa bruscamente de 2.5V a 3.5V. Asuma T = 0.1 seg.

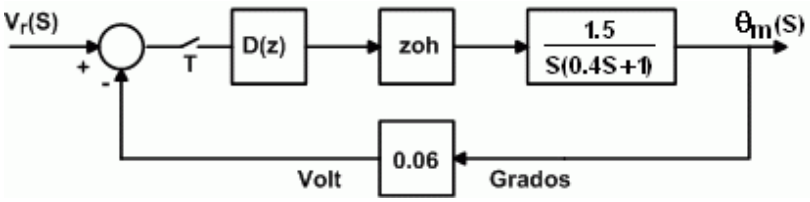


Figura 7.8 Sistema de control para el ejemplo 7.2

SOLUCION: La función de transferencia de pulso del sistema con $T = 0.1\ s$ es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} \qquad HG(z) = \frac{0.0173(z + 0.9201)}{(z - 1)(z - 0.7788)}$$

La función de transferencia de pulso del sistema en lazo abierto está dada por $G(z) = 0.06 * HG(z)$, es decir:

$$G(z) = \frac{0.001038(z + 0.9201)}{(z - 1)(z - 0.7788)}$$

Utilizando la transformación bilineal con $z = (1 + 0.05w)/(1 - 0.05w)$ se obtiene:

$$G(w) = \frac{0.00002331(w + 480.625)(20 - w)}{w(w + 2.487)}$$

El valor de la ganancia K que satisface los requerimientos de error estático, se obtiene utilizando la definición del coeficiente estático de error de velocidad.
Para una entrada rampa se tiene:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \qquad K_v = \lim_{s\to 0} S \cdot FTLA = \lim_{w\to 0} wD(w)G(w)$$

En donde $G(w)$ es la función de transferencia de lazo abierto del sistema.

$$K_v = \frac{1}{e_{ss}} = \lim_{w\to 0} wK \left[\frac{\frac{w}{w_o}+1}{\frac{\alpha w}{w_o}+1}\right] \frac{0.00002331(w+480.625)(20-w)}{w(w+2.487)}$$

Al tomar el límite se obtiene:

$$K_v = \frac{1}{0.2} = 0.09K \qquad K = 55.5$$

Por lo tanto:

$$KG(w) = \frac{0.001293(w+480.625)(20-w)}{w(w+2.487)}$$

$$KG(jw) = \frac{0.001293(jv+480.625)(20-jv)}{jv(jv+2.487)}$$

La tabla que se da a continuación muestra los valores de $|KG(jv)|$ y de $\measuredangle KG(jv)$ para diferentes valores de v.

w	1.000	2.000	3.000	3.100	3.200	4.000	5.000	6.900	7.000	8.000	10.00
v	1.000	2.006	3.022	3.125	3.227	4.054	5.106	7.187	7.300	8.415	10.926
$\|KG(jv)\|$	4.635	1.947	1.062	1.007	0.956	0.657	0.442	0.241	0.2349	0.181	0.115
db	13.322	5.787	0.521	0.0642	-0.383	-3.643	-7.091	-12.34	-12.58	-14.84	-18.73
θ^o	-114.6	-134.4	-148.8	-150.0	-151.1	-159.4	-167.7	-179.8	-180.3	-185.5	-194.5

La figura 7.9 corresponde al diagrama de Bode del sistema sin compensar y de él se obtiene: $MG = 12.4\ db$, $\phi_{PM} = 29.8^o$, $v_\pi = 7.22\ rad/s$ y $v_c = 3.14\ rad/s$
Se asume para el compensador la función de transferencia dada en la ecuación 7.26

$$D(w) = K_c \left[\frac{w+w_o}{w+w_o/\alpha}\right] = K \left[\frac{\frac{w}{w_o}+1}{\frac{\alpha w}{w_o}+1}\right]$$

Como el margen de fase pedido es de 50º y el sistema solo tiene 29.8º, el compensador debe suministrar un adelanto de fase de 50º - 29.8º = 20.2º. Para asegurar las condiciones de diseño se hace $\theta_m = 32^o$. (se recomienda adicionar entre 8º y 12º). Conocido el valor de θ_m el valor de α se obtiene así:

$$\sin(\theta_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad \sin(32^o) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

Al resolver la ecuación anterior resulta: $\alpha = 0.307$

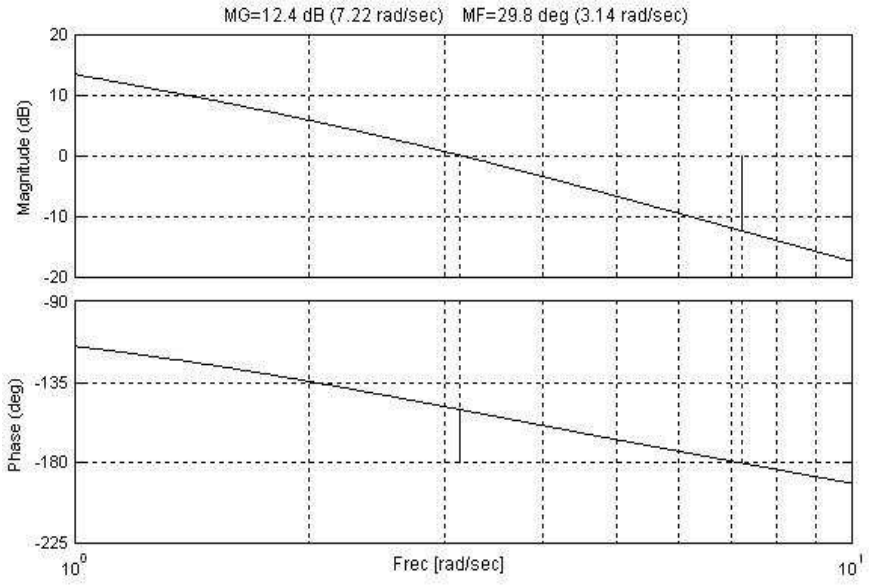


Figura 7.9 Diagrama de Bode para el sistema discreto sin compensador

El ángulo de fase máximo θ_m del compensador se presenta a la frecuencia $v = \sqrt{w_o w_p}$, es decir: $v = \sqrt{w_o w_o/\alpha} = w_o/\sqrt{\alpha}$ (ver deducción de la ecuación 7.13 y ecuación 7.26 en la cual $w_p = w_o/\alpha$) entonces:

$$|D(jv)| = \sqrt{\frac{\left(\frac{v}{w_o}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\alpha v}{w_o}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Ahora se determina la frecuencia para la cual la magnitud del sistema no compensado es igual a: $-20\log\left(1/\sqrt{\alpha}\right) = -20\log\left(1/\sqrt{0.307}\right) = -5.12\ db$. De la

figura 7.9 se obtiene que dicha frecuencia es, aproximadamente, $v = 4{,}5\, rad/s$. Por lo tanto:

$$v = \frac{w_o}{\sqrt{\alpha}} \qquad w_o = v\sqrt{\alpha} = 4.5\sqrt{0.307} \qquad w_o = 2.4933\, rad/s$$

Reemplazando los valores de α, K y w_o en las ecuaciones 7.26 y 7.29 se obtiene:

$$D(w) = \frac{55.5(1 + 0.40107w)}{1 + 0.1231w} = \frac{180.823(w + 2.4933)}{w + 8.1234}$$

$$D(z) = \frac{144.6(z - 0.7788)}{z - 0.4224}$$

Con el $D(w)$ evaluado, se obtiene:

$$K_v = \lim_{w\to 0} w * \frac{180.823(w + 2.4933)}{w + 8.1234} * \frac{0.00002331(w + 480.625)(20 - w)}{w(w + 2.487)}$$

$$K_v = 5 \qquad \text{es decir:} \qquad e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.2$$

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado toma la forma:

$$G_w(z) = \frac{\theta_m(z)}{V_r(z)} = \frac{2.501(z + 0.9201)}{z^2 - 1.2722z + 0.5605}$$

La figura 7.10 muestra el diagrama de Bode del sistema compensado. De ella se obtiene que: $MG = 12.4\, db$, $\phi_{PM} = 49.1^o$, $v_\pi = 11.6\, rad/s$ y $v_c = 4.4 rad/s$.

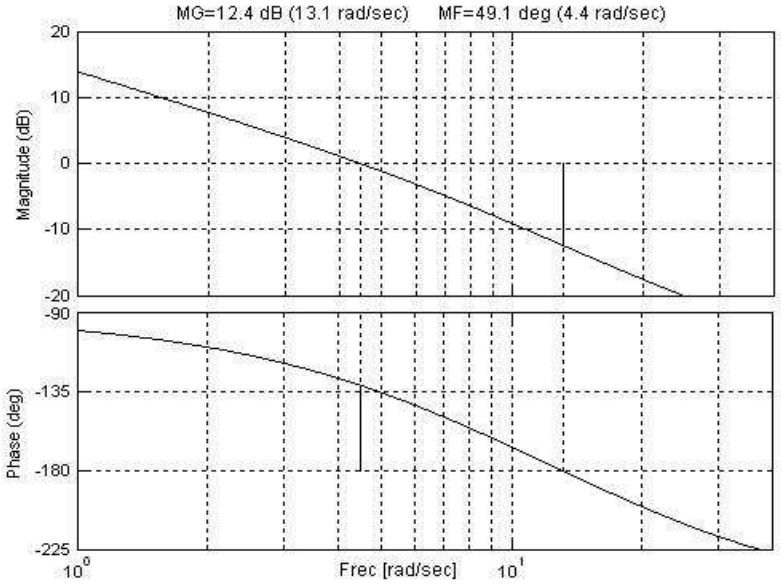


Figura 7.10 Diagrama de Bode para el sistema compensado

La figura 7.11 da la respuesta del sistema cuando la referencia cambia bruscamente de 2.5v a 3.5v.

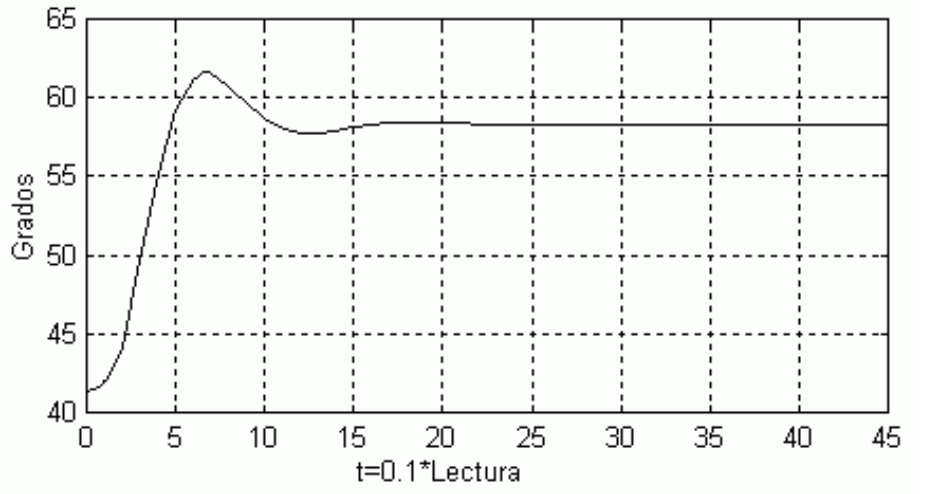


Figura 7.11 Respuesta del sistema compensado al aplicarle un cambio en la referencia de 2.5 a 3.5 voltios

7.1.2 Diseño de un compensador de atraso utilizando diagramas Bode: La función de transferencia en el plano w de este tipo de compensador corresponde a la dada en la ecuación 7.7 con la condición de que $w_o > w_p$, es decir:

$$D(w) = \frac{K_c w_p (w + w_o)}{w_0 (w + w_p)} \qquad 7.30$$

La ganancia de este compensador, a alta frecuencia es:

$$(Ganancia\ alta\ frec) = \frac{K_c w_p}{w_0} \qquad 7.31$$

$$(Ganancia\ alta\ frec)_{db} = 20 \log \frac{K_c w_p}{w_0} \qquad 7.32$$

La figura 7.12 da las características de respuesta en frecuencia del compensador de atraso. El máximo desfase correspondiente a ϕ_m, tiene un valor entre 0 y -90^o y su valor depende del cociente w_o/w_p.

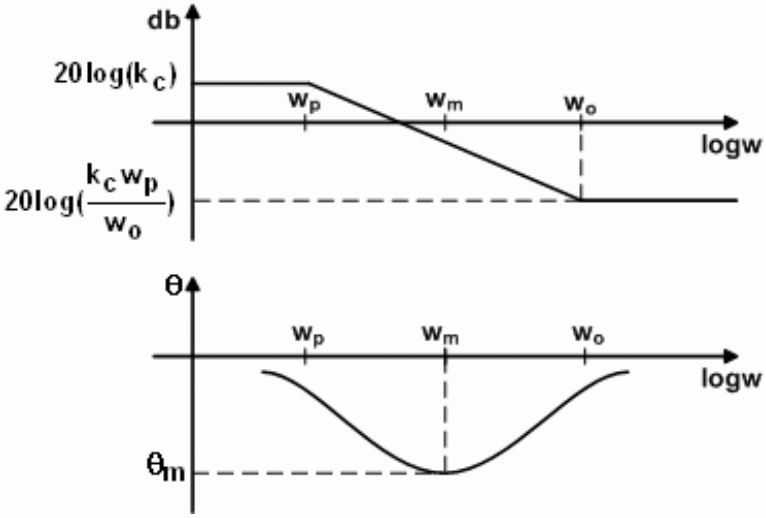


Figura 7.12 Característica de respuesta de frecuencia del compensador de atraso.

La función primaria de un compensador de atraso es atenuar en el rango de alta frecuencia, para dar al sistema un margen de fase suficiente. Como, en general, el atraso de fase tiende a desestabilizar el sistema, las frecuencias de corte w_o y w_p del compensador de atraso deben diseñarse de modo que el atraso de fase no se presente en las vecindades de la frecuencia de cruce de fase w_π de la respuesta de frecuencia de la planta $G(jv)$. Por lo tanto, w_o y w_p deben ser mucho más pequeñas que w_π.

A continuación se presenta un procedimiento que permite estimar los parámetros w_o y w_p del compensador de atraso. Se asume que la ganancia K_c se puede determinar a partir de las especificaciones de respuesta transitoria del sistema y que se especifica el margen de fase ϕ_{PM} deseado. El diseño involucra las siguientes etapas [7.4]:

a) Determinar la ganancia K_c que satisfaga las características de error estático establecidas.
b) Si el sistema no compensado $HG(jv)$ no satisface las especificaciones de margen de fase y de ganancia, determinar la frecuencia v_1 a la cual el

ángulo de fase del sistema en lazo abierto, es aproximadamente $\theta = -180^o + \phi_{PM} + 5^o$ y elegir esta como la nueva frecuencia de cruce de ganancia (la adición de 5^o a 12^o compensa el atraso de fase del compensador).

c) Seleccionar el cero del compensador como:

$$w_o = 0.1v_1 \qquad 7.33$$

Con el fin de asegurar un atraso de fase pequeño (entre 5º y 12º).

d) A la frecuencia v_1 se debe cumplir que: $|D(jv_1)HG(jv_1)| = 1$.

Como la ganancia del compensador a alta frecuencia es $K_c w_p/w_o$, entonces:

$$\left|\frac{K_c w_p}{w_o} \cdot HG(jv_1)\right| = 1 \qquad \frac{K_c w_p}{w_o} = \frac{1}{|HG(jv_1)|}$$

Es decir:

$$w_p = \frac{w_o}{K_c|HG(jv_1)|} = \frac{0.1v_1}{K_c|HG(jv_1)|} \qquad 7.34$$

Una vez calculados K_c, w_o y w_p la función de transferencia de pulso del controlador se obtiene reemplazando estos valores en la ecuación 7.10 y 7.9

EJEMPLO 7.3

La figura 7.13 representa el diagrama en bloques de un sistema de control de cierto proceso industrial. Diseñe un compensador de atraso de modo que el coeficiente de error estático de velocidad sea $K_v = 100$ y el sistema tenga margen de ganancia al menos de 10 db y margen de fase de 50º. Los tiempos se miden en segundos.

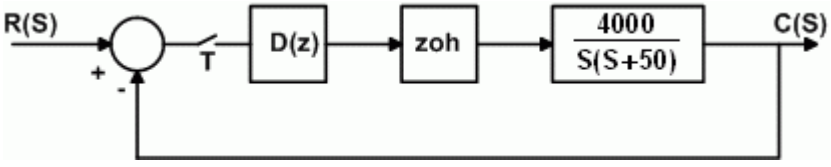


Figura 7.13 Sistema de control para el ejemplo 7.3

SOLUCION: Considerando solamente el sistema continuo, su función de transferencia de lazo cerrado es:

$$G_w(s) = \frac{4000}{S^2 + 50S + 4000}$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado tiene $w_n = 63.24\, rad/s$ y coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.395$, entonces $\tau_{eq} = 1/\xi w_n = 0.04\, s$. Utilizando la ecuación $0.2(\tau_{eq} + \theta') \leq T \leq 0.6(\tau_{eq} + \theta')$, el tiempo de muestreo se puede asumir como $T = 0.01\, s$.

Por lo tanto:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{4000}{S^2(S + 50)}\right\} = \frac{0.1704(z + 0.8467)}{(z - 1)(z - 0.6065)}$$

Para satisfacer el requerimiento del coeficiente de error estático de velocidad, se sabe que:

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z - 1)D(z)HG(z) = \lim_{w\to 0} wD(w)HG(w)$$

Haciendo:

$$z = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} = \frac{1 + 0.005w}{1 - 0.005w}$$

Se obtiene:

$$HG(w) = \frac{0.008127(w + 2410.83)(200 - w)}{w(w + 49)}$$

Con $w = jv$ resulta:

$$HG(jv) = \frac{0.008127(jv + 2410.83)(200 - jv)}{jv(jv + 49)}$$

Utilizando la ecuación 7.30 y el $HG(w)$ calculado se obtiene, al tomar el límite con $K_v = 100$, que $K_c = 0.125$.

La tabla que se da a continuación muestra los valores de $|HG(jv)|$ y $\measuredangle HG(jv)$ para diferentes valores de v. La figura 7.14 corresponde al diagrama de Bode del sistema sin compensar y de él se obtiene que: $MG = 8.71db$ y que $\phi_{PM} = 27.5^o$. El sistema, por ahora, no cumple con las especificaciones exigidas.

w	20.00	25.00	30.00	55.00	60.00	90.00	100.0	105.0	110.0	120.0
v	20.06	25.13	30.22	56.42	61.86	96.61	109.2	115.8	122.6	136.8
$\|HG(jv)\|$	3.72	2.87	2.30	1.003	0.88	0.466	0.393	0.364	0.338	0.294
db	11.41	9.16	7.23	0.029	-1.10	-6.62	-8.09	-8.77	-9.42	-10.62
θ^o	-117.4	-123.5	-129.31	-152.3	-156.0	-173.5	-178.0	-180.1	-182.2	-185.9

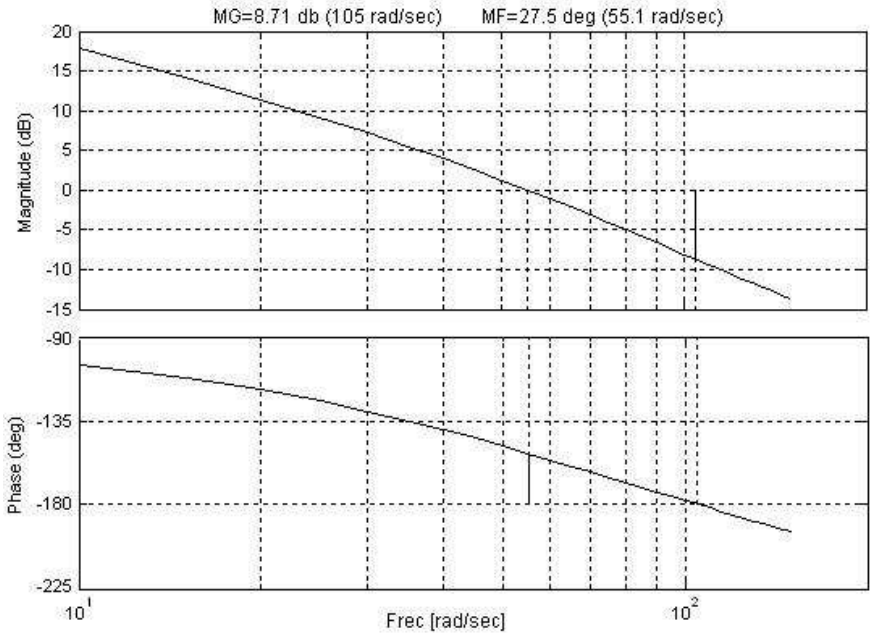


Figura 7.14 Diagrama de Bode para el sistema del ejemplo 7.2 sin compensar

La frecuencia v_1 a la cual el ángulo de fase del sistema sin compensar es $\theta = -180^o + \phi_{PM} + 5^o = 125^o$ es, aproximadamente $v_1 = 26.14\, rad/s$ y la magnitud de la respuesta a esa frecuencia es $|HG(jv_1)| = 2.72$.

Ahora se estima el cero del compensador utilizando la ecuación 7.33:

$$w_o = 0.1v_1 \qquad w_o = 2.614$$

De la ecuación 7.34 se obtiene:

$$w_p = \frac{w_o}{K_c|G(jv_1)|} = \frac{2.614}{1.25 * 2.72} \qquad w_p = 0.7688$$

Utilizando las ecuaciones 7.9 y 7.10 la función de transferencia del controlador es:

$$D(z) = \frac{0.371(z - 0.9742)}{z - 0.9923}$$

Con la ecuación 7.30 se obtiene:

$$D(w) = \frac{0.3676(w + 2.614)}{w + 0.7688}$$

Por lo tanto:

$$K_v = \lim_{w \to 0} wD(w)HG(w) = 100 \qquad \text{(Cumple con } K_v\text{)}$$

El valor del coeficiente de error de velocidad K_v también se puede evaluar utilizando la ecuación:

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z \to 1}(z - 1)D(z)HG(z) = 100$$

La figura 7.15 corresponde al diagrama de Bode del sistema compensado. De él se obtiene que $MG = 17.1\,db$, $\phi_{PM} = 51^o$, $v_\pi = 94.3\,rad/s$ $(w_\pi = 102\,rad/s)$ y $v_c = 26.1\,rad/s$ $(w_c = 26.3\,rad/s)$. La relación entre v y w se obtiene utilizando la ecuación 7.24

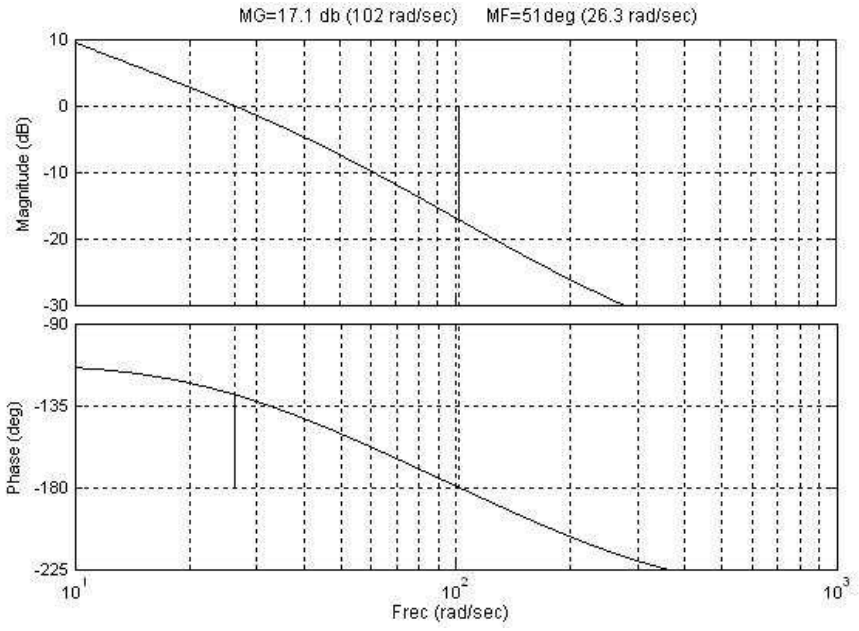


Figura 7.15 Diagrama de Bode para el sistema compensado.

La figura 7.16 da la respuesta del sistema ante un escalón unitario aplicado a la referencia.

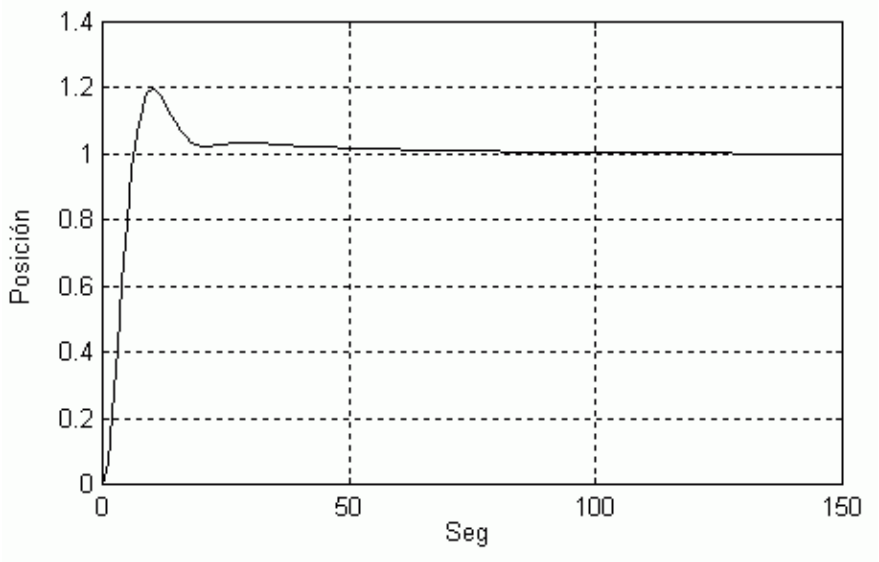


Figura 7.16 Respuesta del sistema compensado ante un escalón unitario.

7.2 DISEÑO DE COMPENSADORES UTILIZANDO EL MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES.

Este método se puede utilizar ventajosamente en el diseño de compensadores discretos cuando se desea localizar los polos dominantes de lazo cerrado en una determinada posición en el plano z y las especificaciones de funcionamiento del sistema están dadas en términos de la respuesta transitoria tales como: máximo sobreimpulso, frecuencia natural no amortiguada coeficiente de amortiguamiento, tiempo de establecimiento, etc.

7.2.1 Diseño de un compensador de adelanto utilizando el método del lugar de las raíces: Existen diferentes procedimientos que permiten diseñar compensadores utilizando el método del lugar geométrico de las raíces. A continuación se enumeran los pasos a seguir utilizando uno de ellos:

a) Determinar la función de transferencia de pulso del sistema, seleccionando previamente el tiempo de muestreo adecuado.

b. Determinar la ubicación de los polos dominantes de lazo cerrado deseados, de acuerdo con las especificaciones de funcionamiento requeridas.
c. Determinar el ángulo de fase que debe aportar el compensador para que el sistema cumpla con la condición de ángulo en el polo de lazo cerrado deseado y asumir que el cero del controlador cancela un polo de la planta. Esto permite calcular el polo del controlador.

$$\measuredangle D(z)HG(z)|_{z=z_o} = -180^o \qquad 7.35$$

d. La ganancia del controlador se calcula utilizando la condición de módulo:

$$|D(z)HG(z)|_{z=z_o} = 1 \qquad 7.36$$

La función de transferencia del compensador se asume como:

$$D(z) = K_c\left[\frac{z+w_o}{z+w_p}\right] \qquad 7.37$$

Para ilustrar el método anterior, se propone a continuación un ejemplo de diseño de un compensador utilizando el método del lugar geométrico de las raíces.

EJEMPLO 7.4

La figura 7.17a muestra el sistema de control de nivel de agua de una caldera y la figura 7.11b da el diagrama de bloques correspondiente. W_v es el flujo másico de agua de alimentación y W_s es el flujo másico de vapor que sale de la caldera. $D(Z)$ es la función de transferencia del compensador. La válvula tiene ganancia 10 y constante de tiempo 0.1 min. La función de transferencia del domo de la caldera es $G(S) = 0.5/S$. Las variaciones en el flujo de vapor W_s, debidas a cambios en la apertura en la válvula de control de flujo de vapor, constituyen la perturbación principal del sistema.

Diseñar un compensador de modo que el sistema en lazo cerrado tenga coeficiente de amortiguamiento de 0.8 y tiempo de establecimiento de 1 min. Asuma un tiempo de muestreo $T = 0.2\,min$. Obtenga la respuesta del sistema cuando se aplica un cambio en escalón en L_r.

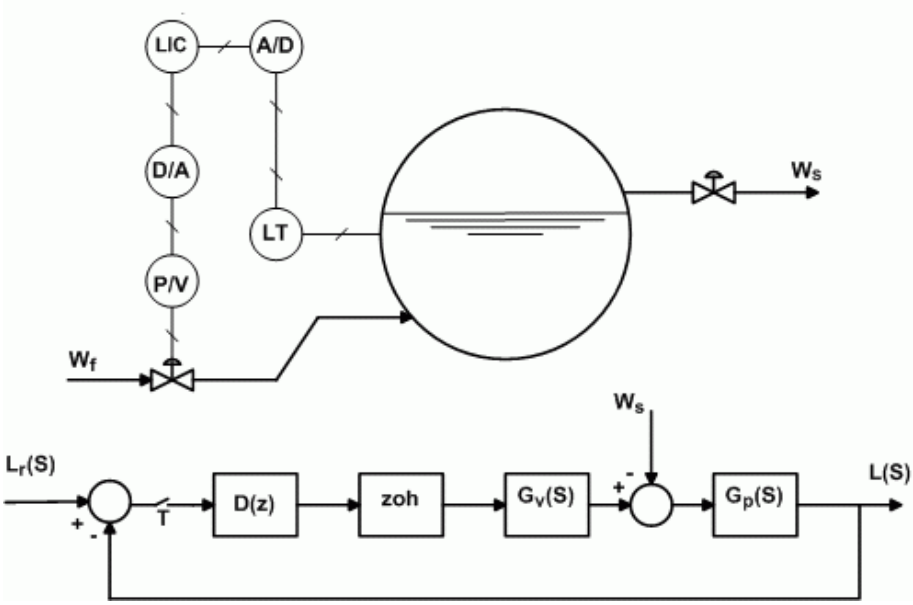


Figura 7.17 Control de nivel del domo de una caldera

SOLUCIÓN: La función de transferencia de pulso del sistema con $T = 0.2\,min$ y, asumiendo $W_s = 0$ es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_v(S)G_p(S)}{S}\right\} \qquad HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{0.5}{S^2(0.1S + 1)}\right\}$$

$$HG(z) = \frac{0.05677z + 0.0297}{z^2 - 1.1353z + 0.1353} = \frac{0.05677(z + 0.5231)}{(z - 1)(z - 0.1353)}$$

De acuerdo a las especificaciones de funcionamiento dadas, la ubicación de los polos de lazo cerrado deseados se determina así:

$$|z| = e^{-\xi w_n T} \qquad \measuredangle z = 57.3 w_n T\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} \qquad w_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0.8} \qquad w_n = 5\ rad/min$$

$$|z| = e^{-0.8*5*0.2} = 0.4493 \qquad \measuredangle z = 57.3 * 5 * 0.2\sqrt{1 - 0.8^2} = 34.4^o$$

Es decir, los polos dominantes deseados, para el sistema en lazo cerrado, deben estar ubicados en $z_o = 0.3707 + j0.2538$ y en $z_o = 0.3707 - j0.2538$.

La suma de los ángulos en el polo deseado debe ser igual a -180^o. Así, para el sistema dado:

$$\theta = \measuredangle \frac{0.05677(z+0.5231)}{(z-1)(z-0.1353)}\bigg|_{z=z_o} = \measuredangle \frac{0.05677(0.8938+j0.2538)}{(-0.6293+j0.2538)(0.2353+j0.2538)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.2538}{0.8938}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{0.2538}{0.6293}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0.2538}{0.2353}\right) = -189.3^o$$

El compensador debe suministrar un ángulo θ_c tal que:

$\theta_c + \theta = -180^o$ $\theta_c = -180^o - \theta = -180^o + 189.3^o = 9.3^o$

Si se asume que el cero del controlador cancela el polo $z = 0.1353$ del sistema se obtiene:

$$D(z) = K_c\left[\frac{z+w_o}{z+w_p}\right] \qquad D(z) = \frac{K_c(z-0.1353)}{z+w_p}$$

Entonces:

$$\measuredangle \frac{K_c(z-0.1353)}{z+w_p}\bigg|_{z=z_o} = 9.3^o \qquad \measuredangle \frac{K_c(0.1354+j0.2538)}{0.3707+w_p+0.2538} = 9.3^o$$

La ecuación anterior se cumple para $W_p = -0.044$. Por lo tanto, el compensador toma la forma:

$$D(z) = \frac{K_c(z-0.1353)}{z-0.044}$$

La ganancia K_c se obtiene a partir de la condición de módulo:

$$|D(z)HG(z)|_{z=z_o} = 1$$

Reemplazando:

$$\left|\frac{K_c(z-0.1353)}{(z-0.044)} * \frac{0.05677(z+0.5231)}{(z-1)(z-0.1353)}\right|_{z=z_o} = 1$$

$$\left|\frac{0.05677(0.8938+j0.2538)K_c}{(0.3267+j0.2538)(-0.6293+j0.2538)}\right| = 1$$

Resolviendo para K_c se obtiene:

$$K_c = 5.321$$

Con el valor de K_c estimado resulta:

$$D(z) = \frac{5.321(z-0.1353)}{z-0.044}$$

La función de transferencia de pulso del sistema en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

Es decir:

$$G_w(z) = \frac{L(z)}{L_r(z)} = \frac{0.3021(z + 0.5232)}{z^2 - 0.7414z + 0.2018} = \frac{0.3021(z + 0.5232)}{(z - 0.3707 - j0.2538)(z - 0.3707 + j0.2538)}$$

La figura 7.18 representa la respuesta del sistema cuando se aplica un escalón unitario en la referencia L_r.

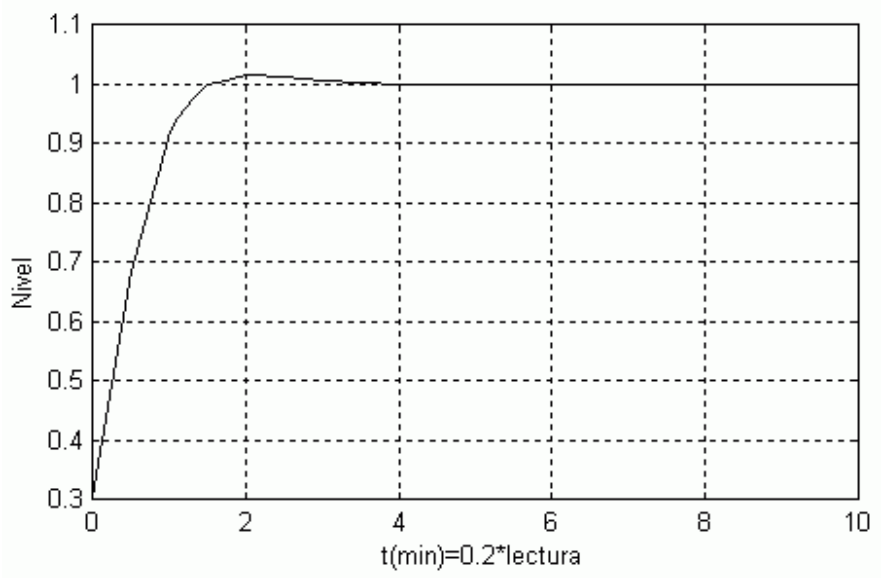


Figura 7.18 Respuesta del sistema ante un cambio en escalón unitario aplicado en la referencia.

7.2.2 Diseño de un compensador de atraso utilizando el método del lugar de las raíces: Para el sistema de control en tiempo discreto mostrado en la figura 7.19, la ecuación característica está dada por:

$$1 + KD(z)HG(z) = 0 \qquad 7.38$$

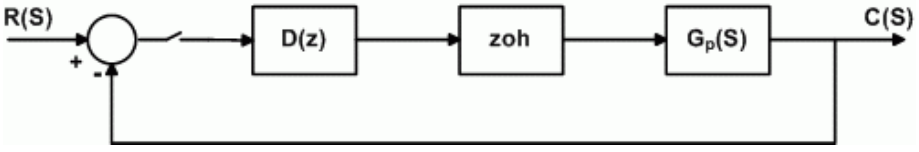


Figura 7.19 Sistema de control en tiempo discreto.

En donde K es la ganancia que se toma como parámetro variable para generar el lugar geométrico de las raíces.

Un punto z_o ubicado sobre el lugar geométrico de las raíces debe cumplir, como se vio en la sección 4.4.1, con la condición de ángulo y con la condición de módulo, es decir:

$$\measuredangle KD(z_o)HG(z_o) = \pm 180^o \tag{7.39}$$

$$|KD(z_o)HG(z_o)| = 1 \tag{7.40}$$

Si $D(z) = 1$, la ganancia K_u que ubica al polo en $z = z_o$ está dada por:

$$K_u = \frac{1}{|HG(z_o)|} \tag{7.41}$$

Para el diseño se puede asumir que la función de transferencia del compensador es:

$$D(z) = \frac{K_d(z - w_o)}{z - w_p} \tag{7.42}$$

Si $w_p > w_0$ y $K_d < 1$: el compensador es de atraso.

Si $w_o > w_p$ y $K_d > 1$: el compensador es de adelanto.

Para que la ganancia del compensador sea unitaria se debe cumplir qué:

$$K_d = \frac{1 - w_p}{1 - w_o} \tag{7.43}$$

Si K_c es la ganancia adicional que se debe introducir al sistema para satisfacer las condiciones de diseño, la función de transferencia de pulso del sistema en lazo abierto es:

$$K_c D(z)HG(z) = \frac{K_c K_d(z - w_o)HG(z)}{z - w_p} \tag{7.43a}$$

Para ubicar el polo en $z = z_o$ sobre el lugar geométrico de las raíces, se debe cumplir qué:

$$1 + K_c D(z_o)HG(z_o) = 0$$

$$1 + \frac{K_c K_d(z - w_o)HG(z_o)}{z_o - w_p} = 0 \tag{7.44}$$

Si el cero y el polo del compensador en atraso se colocan muy cerca entre sí, es decir si se logra que $w_o \cong w_p$, las magnitudes de $|z_o - w_o|$ y $|z_o - w_p|$ son aproximadamente iguales. Esto implica que si $K_d = 1$ las características de respuesta transitoria del sistema no se alteran. Se recomienda que el cero y el polo del controlador estén muy cerca de $z = 1$ con el fin de que el lugar de las raíces del sistema no compensado y el del sistema compensado sean muy similares. Con las consideraciones anteriores y, utilizando la ecuación 7.44 se obtiene:

$$K_c = \left|\frac{z_o - w_p}{K_d(z - w_o)HG(z_o)}\right| \cong \left|\frac{1}{K_d HG(z_o)}\right| \qquad 7.45$$

Teniendo en cuenta la ecuación 7.41 se obtiene:

$$K_c = \frac{K_u}{K_d} \qquad 7.46$$

A partir de las consideraciones anteriores, el procedimiento para diseñar el compensador de atraso, utilizando el método del lugar geométrico de las raíces es el siguiente:

a) Seleccionar el polo de lazo cerrado deseado z_o y calcular la ganancia K_u que sea requerida para ubicar a z_o en el lugar geométrico de las raíces del sistema sin compensar.

$$K_u = \left|\frac{1}{HG(z_o)}\right| \qquad 7.47$$

b) Determinar, a partir de las especificaciones de diseño, la ganancia K_c requerida.

c) Calcular la ganancia K_d del compensador a partir de la ecuación 7.46:

$$K_d = \frac{K_u}{K_C} \qquad K_d < 1 \qquad 7.48$$

d) Ubicar el polo w_p del compensador suficientemente cerca de $z = 1$ para satisfacer la ecuación 7.45.

e) Calcular el cero del compensador w_o, a partir de la ecuación 7.43:

$$w_o = 1 - \frac{1 - w_p}{K_d} \qquad 7.49$$

EJEMPLO 7.5

En el sistema de control mostrado en la figura 7.19:

$$G_p(S) = \frac{0.8}{S(S + 0.5)}$$

a) Trace el lugar geométrico de las raíces del sistema y determine el valor de K_c de modo que la ecuación característica del mismo tenga dos raíces reales e iguales (Sistema críticamente amortiguado). b) Determine las dos constantes de tiempo de los polos hallados en a). c) Se desea que la ganancia obtenida en la parte a) se multiplique por 2 sin modificar considerablemente las raíces de la ecuación característica. Diseñe un compensador de atraso que satisfaga las especificaciones dadas. Asuma que $T = 0.2\ s$.

SOLUCIÓN: Con $T = 0.2\ s$ la función de transferencia de pulso del sistema es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left[\frac{0.8}{S^2(S + 0.5)}\right] \qquad HG(z) = \frac{0.01548(z + 0.9368)}{(z - 1)(z - 0.9029)}$$

a) En la figura 7.20 se da el lugar geométrico de las raíces del sistema sin compensar.

La ecuación característica del sistema, en lazo cerrado es:

$$1 + \frac{0.01548(z + 0.9368)}{(z - 1)(z - 0.9029)} = 0$$

$$z^2 - (1.9029 - 0.01548K)z + 0.9029 + 0.0145K = 0$$

Esta ecuación tendrá dos raíces reales e iguales cuando $K = 0.08$ es decir, en $z_o = 0.95$. Por lo tanto:

$$K_u = \left|\frac{1}{HG(z_o)}\right| = \left|\frac{(z - 1)(z - 0.9029)}{0.01548(z + 0.9368)}\right|_{z=0.95} \qquad K_u = 0.08$$

b) La constante de tiempo equivalente para el polo ubicado en $z = 0.95$ se obtiene utilizando la ecuación:

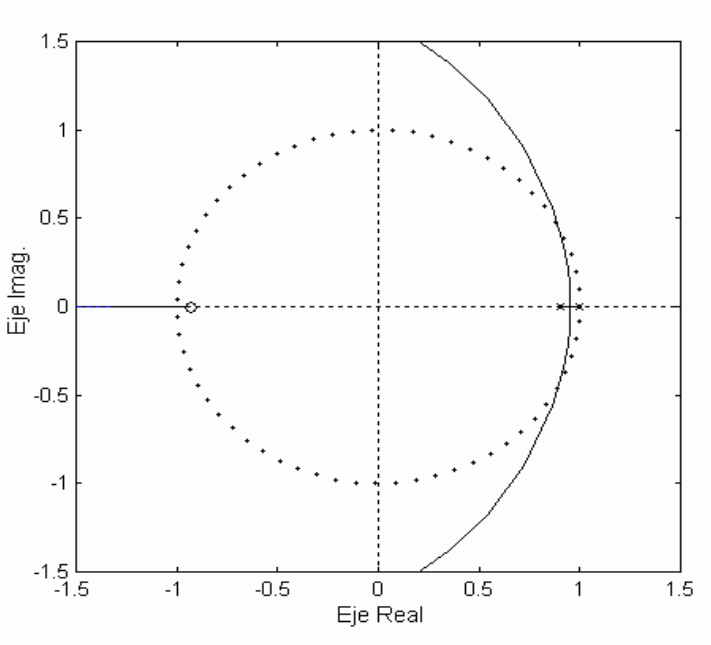


Figura 7.20 Lugar de las raíces para el sistema sin compensar

$$|z| = e^{-\xi w_n T} = e^{-T/\tau}$$

Despejando τ se obtiene:

$$\tau = -\frac{T}{\ln|z|} = -\frac{0.2}{\ln(0.95)} \qquad \tau = 3.9\ s.$$

c) De acuerdo con las especificaciones del problema, el nuevo valor de K_u está dado por:

$$K_u' = 2K_u = 2 * 0.08 = 0.16$$

De la ecuación 7.48 resulta:

$$K_d = \frac{K_u}{K_C}$$

Si se asume que $K_c = 2$ entonces: $K_d = 0.08$:

Ahora se ubica el polo del compensador en $w_p = 0.9999$, el cero del mismo estará ubicado en:

$$w_o = 1 - \frac{1 - w_p}{K_d} = 1 - \frac{1 - 0.9999}{0.08} \qquad K_d = 0.9987$$

Así, la función de transferencia de pulso del compensador es:

$$D(z) = \frac{K_d(z - z_0)}{z - z_p} \qquad D(z) = \frac{0.08(z - 0.9987)}{z - 0.9999}$$

La función de transferencia de lazo abierto del sistema compensado es:

$$G(z) = D(z)HG(z) = \frac{0.00123(z - 0.9987)(z + 0.9368)}{(z - 1)(z - 0.9029)(z - 0.9999)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado, con el controlador incluido es:

$$G_w(z) = \frac{0.00123(z - 0.9987)(z + 0.9368)}{(z - 0.9987)(z - 0.9524)(z - 0.9524)} = \frac{0.00123(z + 0.9368)}{(z - 0.9524)(z - 0.9524)}$$

Como puede verse, las raíces de la ecuación característica son $z = 0.9524$ y $z = 0.9524$. Esto indica que el compensador no modifica, en forma considerable, las raíces de la ecuación característica.

La figura 7.21 corresponde al lugar geométrico de las raíces del sistema compensado.

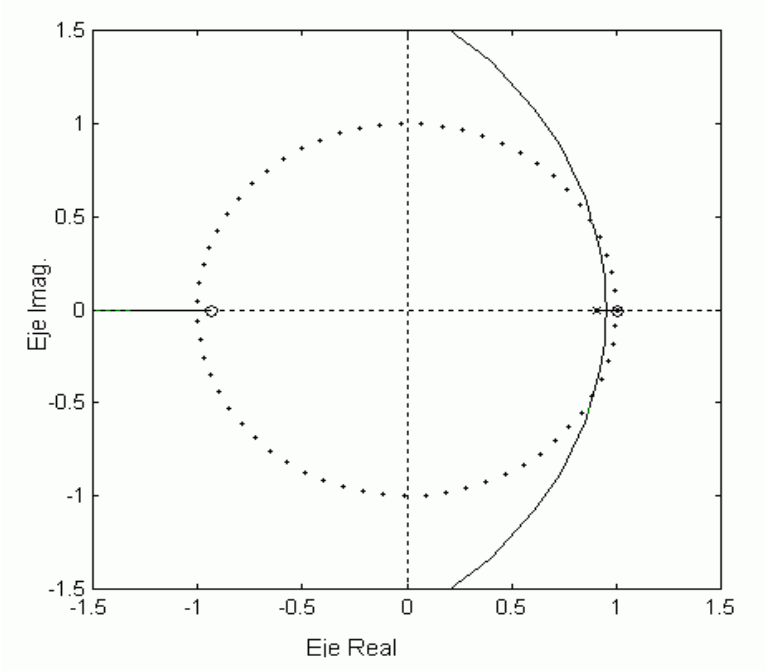


Figura 7.21 Lugar geométrico de las raíces para el sistema compensado.

La figura 7.22 representa la respuesta del mismo ante una entrada en escalón unitario aplicada en el set-point.

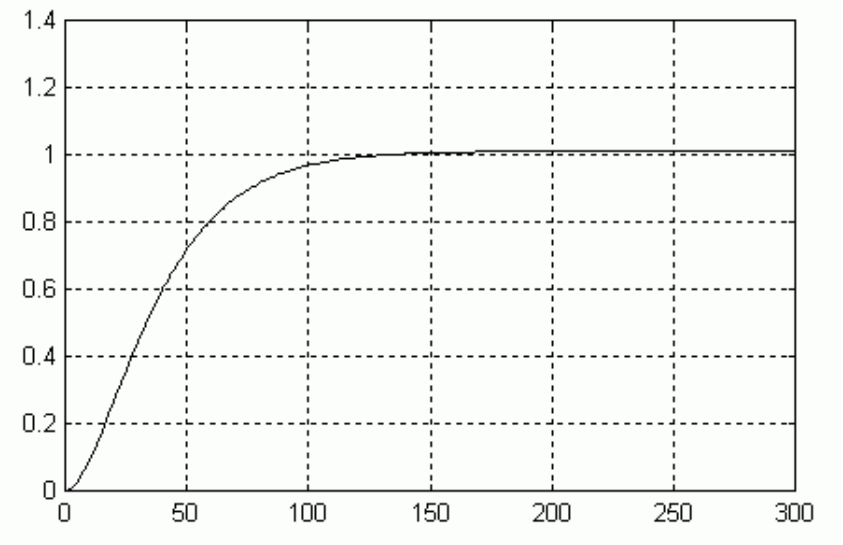


Figura 7.22 Respuesta del sistema compensado al escalón unitario.

7.2.3 Controlador PI: Este tipo de controlador es, realmente, un compensador de atraso. Por lo tanto, para su diseño, se puede aplicar la técnica del lugar geométrico de las raíces expuesta en la sección anterior. Para mayor claridad se explica su diseño mediante un ejemplo práctico

EJEMPLO 7.6

Para el sistema de control mostrado en la figura, 7.19:

$$G_p(S) = \frac{0.5e^{-0.1S}}{\%S + 1}$$

Diseñar un controlador PI de modo que los polos dominantes de lazo cerrado del sistema tengan: coeficiente de amortiguamiento de 0.8 y tiempo de establecimiento de 8 seg.

SOLUCIÓN: La función de transferencia de pulso del controlador PI es:

$$D(z) = \frac{q_o z + q_1}{z - 1} = \frac{q_o(z + q_1/q_0)}{z - 1}$$

Asumiendo como tiempo de muestreo $T = 0.5\ s$ se obtiene:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad HG(z) = \frac{0.03844(z + 0.2377)}{z(z - 0.9048)}$$

Según las especificaciones del problema, la ubicación de los polos de lazo cerrado se obtiene así:

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} \qquad w_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0.8 * 8} \qquad w_n = 0.625\ rad/s$$

$$|z| = e^{-\xi w_n T} = 0.7788 \qquad \theta = 57.3 w_n T\sqrt{1 - \xi^2} = 10.75^o$$

Por lo tanto:

$$z = 0.7788\angle 10.75^o \qquad z = 0.765 \pm j0.145$$

La suma de los ángulos en el polo dominante deseado debe ser igual a -180º. Para el sistema dado:

$$\theta = \angle \frac{0.03844(z + 0.2377)}{z(z - 0.9048)}\Big|_{z=0.765+j0.145}$$

$$\theta = \angle \frac{0.03844(1.0027 + j0.145)}{(0.765 + j0.145)(-0.1398 + j0.145)}$$

Es decir:

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{0.145}{1.0027}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{0.145}{0.765}\right] - \tan^{-1}\left[-\frac{0.145}{0.1398}\right]$$

$$\theta = 8.22^o - 10.73^o - 133.95^o \qquad \theta = -1.36.46^o$$

Entonces, el controlador debe suministrar un ángulo:

$$\theta_c = -180 - \theta \qquad \theta_c = -180^o + 136.45^o = -43.57^o$$

Por lo tanto:

$$\theta_c = \angle \frac{q_o(z + q_1/q_0)}{z - 1}\Big|_{z=0.765+j0.145} = -43.57^o$$

$$\theta_c = \angle \frac{q_o(0.765 + j0.145 + q_1/q_o)}{-0.235 + j0.145} = -43.57^o$$

$$\tan^{-1}\left[\frac{0.145}{0.765 + q_1/q_o}\right] - \tan^{-1}\left[-\frac{0.145}{0.235}\right] = -43.57^o$$

$$\tan^{-1}\left[\frac{0.145}{0.765+q_1/q_o}\right]=104.75^o \qquad \frac{0.145}{0.765+q_1/q_o}=-3.798$$

Resolviendo se obtiene:

$$\frac{q_1}{q_o}=-0.8032$$

El valor de q_o se obtiene a partir de la condición de módulo:

$$|D(z)HG(z)|_{z=z_o}=1$$

$$\left|\frac{q_o(z-0.8032)}{z-1}\cdot\frac{0.03844(z+0.2377)}{z(z-0.9048)}\right|_{z=0.765+j0.145}=1$$

Es decir:

$$\left|\frac{0.03844q_o(-0.0382+j0.145)(1.0027+j0.145)}{(-0.235+j0.145)(0.765+j0.145)(-0.1398+j0.145)}\right|=1$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$0.13488q_o=1 \qquad q_o=7.414$$

Por lo tanto, el controlador PI pedido es:

$$D(z)=\frac{M(z)}{E(z)}=\frac{7.414(z-0.8032)}{z-1}$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema diseñado es:

$$G_w(Z)=\frac{D(z)HG(z)}{1+D(z)HG(z)}$$

Con el $D(z)$ y el $HG(z)$ calculados se obtiene:

$$G_w(z)=\frac{0.285(z-0.8032)(z+0.2377)}{(z-0.0898)(z^2-1.53z+0.60625)}$$

Las raíces del término cuadrático en el denominador son: $z=0.765\pm j0.145$ que corresponden a los polos dominantes de lazo cerrado deseados.

La figura 7.23 representa el diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema compensado y la figura 7.24 da la respuesta del mismo a un escalón unitario aplicado en el set-point.

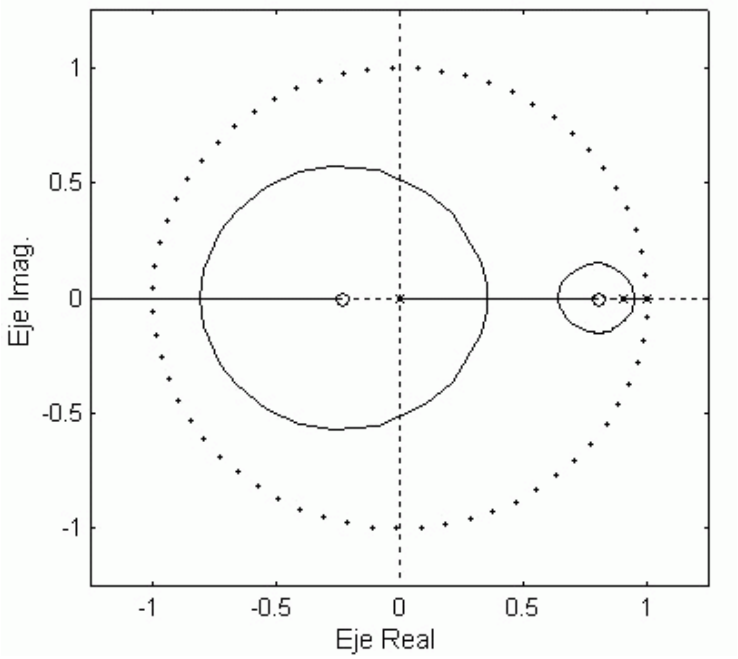


Figura 7.23 Lugar geométrico de las raíces para el sistema con el controlador PI

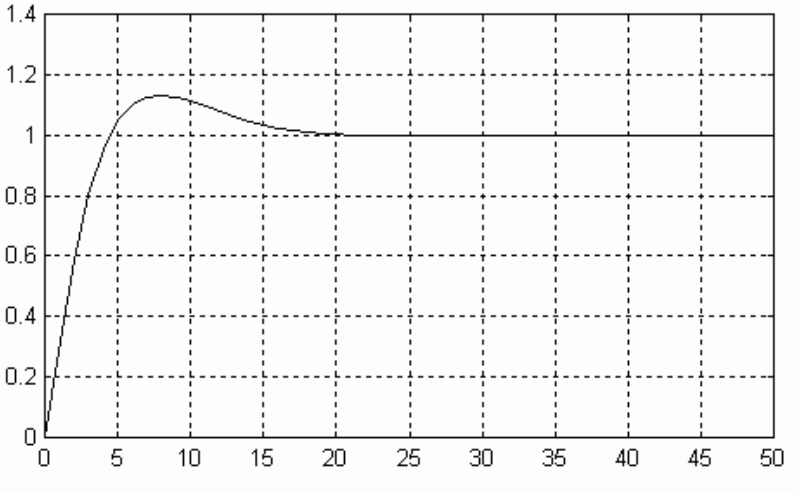


Figura 7.24 Respuesta del sistema a un escalón unitario con el control PI

7.3 DISEÑO DE COMPENSADORES POR EL MÉTODO DE RAGAZZINI

Para el sistema de control discreto mostrado en la figura 7.25, la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} \qquad 7.50$$

Si se especifica cuál debe ser el comportamiento de la planta en lazo cerrado, es decir, si se especifica $G_w(z)$, el compensador $D(z)$ resultante a partir de la ecuación 7.50 es:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \cdot \frac{G_w(z)}{1 - G_w(z)} \qquad 7.51$$

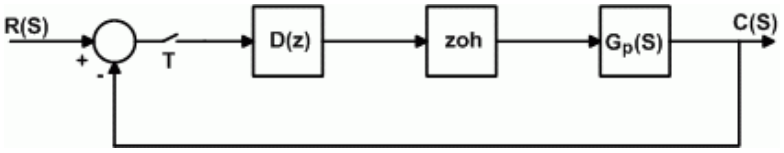


Figura 7.25 Sistema de control digital

Como puede verse, a partir de la ecuación 7.51, una parte del controlador cancela los polos y ceros de la planta. El problema consiste en establecer e implementar restricciones específicas sobre $G_w(z)$ de modo que el controlador sea realizable y que el sistema, en lazo cerrado, tenga un comportamiento adecuado. Dichas restricciones se pueden resumir en las siguientes:

1. **Restricción de causalidad:** un sistema causal o realizable es aquel que no responde antes de ser excitado. Para que $D(z)$ en la ecuación 7.51 sea causal, es necesario que $HG(z)$ y $G_w(z)$ tengan ceros del mismo orden en el infinito es decir, si $HG(z)$ se expande en potencias de z^{-1}, el término más significativo de $G_w(z)$ en potencias de z^{-1} debe ser al menos tan grande como el de $HG(z)$.

   Si $G_w(z)$ es de la forma:

$$G_w(z) = \frac{b_o z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_n} \qquad 7.52$$

   En donde:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_n = 0$$

Es la ecuación característica deseada.

La restricción de causalidad implica qué:

$$G_w(z)|_{z=\infty} = 0 \qquad 7.53$$

2. **Restricción de estabilidad:** Si $HG(z)$ tiene polos fuera del círculo unitario, el sistema es inestable. El controlador $D(z)$ no debe cancelar dichos polos pues cualquier error en la cancelación entre ceros y polos hará que con el tiempo, el sistema se haga inestable. Entonces, para que los polos inestables se cancelen, se deben cumplir las siguientes condiciones:
   - $1 - G_w(z)$ debe tener como ceros todos los polos de $HG(z)$ que estén fuera del círculo unitario.
   - $G_w(z)$ debe tener como ceros todos los ceros de $HG(z)$ que estén fuera del círculo unitario.
3. **Restricción de exactitud:** Como $G_w(z)$ es la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, entonces:

$$E(z) = [1 - G_w(z)]R(z) \qquad 7.54$$

Si el sistema es tipo 1, con constante de error de velocidad K_v, debe tener un error de estado estable igual a cero ante una entrada en escalón unitario y $1/K_v$ de error de estado estable ante una entrada en rampa unitaria, es decir:

- Para un escalón unitario :

$$e_{ss} = \lim_{z\to 1}(z-1)[1 - G_w(z)] \cdot \frac{1}{z-1}$$

$$G_w(1) = 0 \qquad 7.55$$

- Para una rampa unitaria:

$$e_{ss} = \lim_{z\to 1}(z-1)\,[1 - G_w(z)] \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Utilizando el teorema de L'Hopital se obtiene:

$$\frac{d[G_w(z)]}{dz} = -\frac{1}{TK_v} \qquad 7.56$$

La aplicación de las restricciones anteriores y el cumplimiento de las especificaciones impuestas al sistema, permiten el diseño del compensador.

EJEMPLO 7.7

La figura 7.26 representa el esquema de una antena diseñada para rastrear un satélite. La dinámica del sistema que describe el movimiento de la antena se puede aproximar mediante la expresión:

$$G_p(S) = \frac{\theta(S)}{U(S)} = \frac{0.02}{S(S+0.2)}$$

Diseñar un compensador de modo que el sistema, en lazo cerrado, tenga tiempo de crecimiento de 10 seg, sobreimpulso máximo <10% y coeficiente estático de error de velocidad igual a 2.

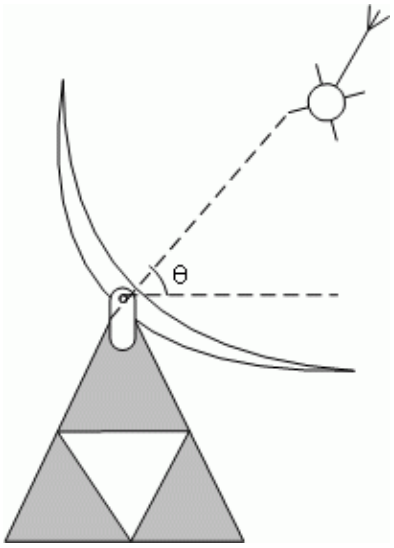


Figura 7.26 Antena rastreadora de satélites

SOLUCION: La constante de tiempo equivalente del sistema continuo en lazo cerrado es: $\tau_{eq} = 10\ s$. Por lo tanto, se puede tomar como periodo de muestreo $T = {}^{\tau_{eq}}/_{5} = 2\ s$.

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{0.02}{S^2(S+0.2)}\right\}$$

$$HG(z) = \frac{0.0352(z + 0.8753)}{(z-1)(z-0.6703)}$$

La ubicación deseada para los polos de lazo cerrado está dada por:

$$|z| = e^{-\xi w_n T} \qquad \theta = 57.3 w_n T\sqrt{1-\xi^2}$$

De las condiciones del problema:

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \qquad 0.1 = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \xi = 0.591$$

$$t_r = \frac{0.8 + 2.5\xi}{w_n} \qquad w_n = \frac{0.8 + 2.5\xi}{t_r} \qquad w_n = 0.227\ rad/s$$

$$|z| = 0.764 \qquad \theta = 21^o \qquad z = 0.713 \pm j0.273$$

La ecuación característica deseada es, entonces:

$$z^2 - 1.426z + 0.5828 = 0$$

Como el sistema es de segundo orden, $G_w(z)$ debe ser de la forma:

$$G_w(z) = \frac{b_o z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - 1.426z + 0.5828}$$

a) Restricción de causalidad :

$$G_w(z)|_{z\to\infty} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad b_o = 0$$

b) Restricción de estabilidad: no se aplica pues $G_w(z)$ no tiene polos ni ceros fuera del círculo unitario.

c) Restricción de exactitud :

$$G_w(1) = \frac{b_o + b_1 + b_2}{1 - 1.426 + 0.5828} = 1$$

$$b_1 + b_2 = 0.1568 \qquad Ec \quad C_1$$

Ahora se evalúa la derivada de $G_w(z)$ con respecto a z en $z = 1$, es decir:

$$\frac{d[G_w(z)]}{dz} = -\frac{1}{TK_v}$$

$$\frac{[z^2 - 1.426z + 0.5828][2b_o z + b_1] - [b_o z^2 + b_1 z + b_2][2z - 1.426]}{[z^2 - 1.426z + 0.5828]^2} = -\frac{1}{4}$$

Evaluando la expresión anterior en $z = 1$ resulta:

$$-0.4172b_1 - 0.574b_2 = -0.006146 \qquad Ec.\ \ C_2$$

Resolviendo las ecuaciones C_1 y C_2 se obtiene:

$$b_1 = 0.5348, \quad b_2 = -0.378$$

Por lo tanto:

$$G_w(z) = \frac{0.5348z - 0.378}{z^2 - 1.426z + 0.5828} = \frac{0.5348(z - 0.7068)}{z^2 - 1.426z + 0.5828}$$

$$1 - G_w(z) = \frac{z^2 - 1.9608z + 0.9608}{z^2 - 1.426z + 0.5828} = \frac{(z-1)(z - 0.9608)}{z^2 - 1.426z + 0.5828}$$

La ecuación del controlador es:

$$D(z) = \frac{(z-1)(z - 0.6703)}{0.0352(z + 0.8753)} \cdot \frac{0.5348(z - 0.7068)}{(z-1)(z - 0.9608)}$$

$$D(z) = \frac{15.193(z - 0.6703)(z - 0.7068)}{(z - 0.9608)(z + 0.8753)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema, con el controlador diseñado, es:

$$G_w(z) = \frac{0.5348(z - 0.7068)}{z^2 - 1.426z + 0.5828}$$

La figura 7.27a corresponde a la respuesta del movimiento de la antena cuando se le aplica un escalón unitario en la señal de referencia y la figura 7.27b representa la acción del controlador sobre el elemento final de control de la misma. Como puede verse, el controlador presenta oscilaciones ocultas ("efecto timbre"), debido al polo ubicado en $z = -0.8753$. Para obviar el problema se aplica la técnica presentada en la sección 6.3.2, con la cual se obtiene qué:

$$D(z) = \frac{8.101(1 - 0.6703z^{-1})(1 - 0.7068z^{-1})}{(1 - 0.523z^{-1})} = \frac{8.101(z - 0.6703)(z - 0.7068)}{z(z - 0.523)}$$

La figura 7.27c representa la respuesta del movimiento de la antena y la figura 7.27d la acción del controlador sobre el elemento final de control de la misma al aplicar un escalón unitario en la referencia, una vez suprimido el efecto timbre que producía el controlador.

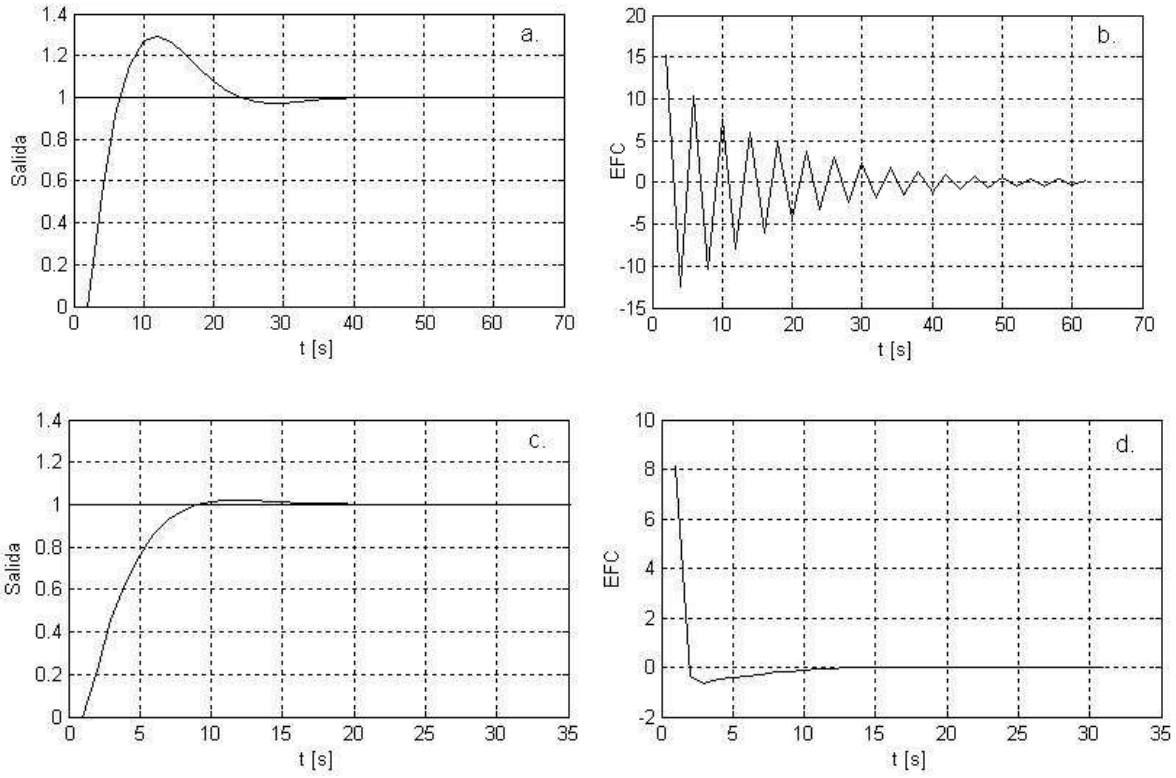


Figura 7.27 Respuesta del movimiento de la antena y del controlador al aplicar un escalón unitario a) y b) con efecto timbre c) y d) sin efecto timbre.

PROBLEMAS PROPUESTOS

7.1 Para el sistema de control discreto mostrado en la figura 7.28, diseñe un compensador de modo que el sistema tenga un margen de fase de 50º, margen de ganancia de por lo menos 8 dB y constante de error de velocidad K_v igual a 10. Asuma que el periodo de muestreo es de 0.2 seg. Una vez diseñado el compensador, trace el diagrama de Bode del sistema compensado y obtenga la respuesta del mismo ante una entrada en escalón unitario aplicado en el set-point. La función de transferencia del proceso es:

$$G_p(S) = \frac{1}{S(S+0.4)}$$

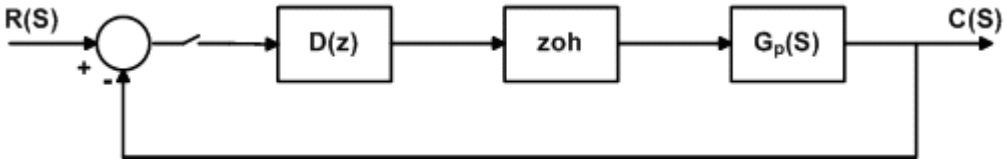


Figura 7.28 Sistema de control para los problemas 7.1 y 7.2

7.2 Si en la figura 7.28, $G_p(S) = 4/(S+1)(S+2)$, utilice el método de respuesta en frecuencia y diseñe un compensador de modo que el sistema tenga: margen de fase de 60º, margen de ganancia mayor o igual a 10 dB y constante estática de error de velocidad $K_v v = 4\,s^{-1}$. Considere que $T = 0.2\,s$. Una vez diseñado el compensador, trace el diagrama de Bode del sistema compensado y obtenga la respuesta del mismo cuando $r(t) = u(t)$.

7.3 Considere el sistema de control digital de la figura 7.29, seleccione el período de muestreo adecuado y obtenga la función de transferencia de pulso $HG(Z)$. Diseñe, utilizando el método del lugar de las raíces, un compensador de modo que los polos dominantes de lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento de 0.8 y tiempo de establecimiento igual a 2 segundos. Grafique la respuesta del sistema cuando se aplica un escalón unitario en la referencia.

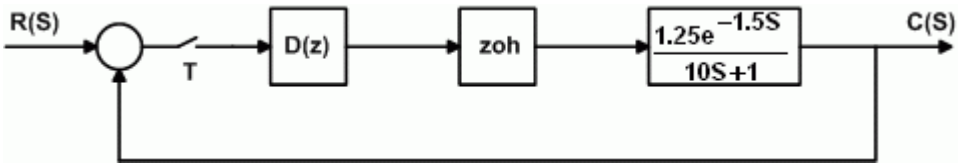


Figura 7.29 Sistema de Control par a el problema 7.3

7.4 Diseñe un compensador digital para el sistema mostrado en la figura 7.30, de modo que los polos dominantes de lazo cerrado tengan: coeficiente de amortiguamiento de 0.7 y frecuencia natural no amortiguada igual a 2 rad/s.

Asuma que el período de muestreo es $T = 0.5\,s$. Grafique la respuesta del sistema compensado ante una entrada en escalón unitario.

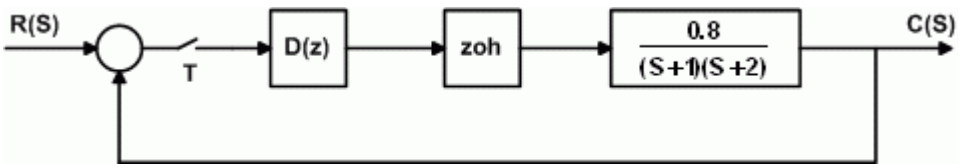


Figura 7.30 Sistema de Control para el problema 7.4

7.5 Considere el sistema de control digital dado en la figura 7.31. La planta corresponde a la dinámica de un sistema de calentamiento de un horno para cocción de cerámica. a) Diseñe, utilizando el método del lugar de las raíces, un controlador PI de modo que la respuesta del sistema ante un escalón unitario tenga un sobreimpulso máximo del 10% y tiempo de pico de 4 minutos. b) Diseñe un controlador PI por el método de Ziegler Nichols. c) Obtenga para a) y para b) la respuesta del sistema ante un escalón unitario. Qué conclusiones se pueden sacar con la observación de estas respuestas? Estime el tiempo de muestreo adecuado para discretizar el sistema. Los tiempos están en minutos.

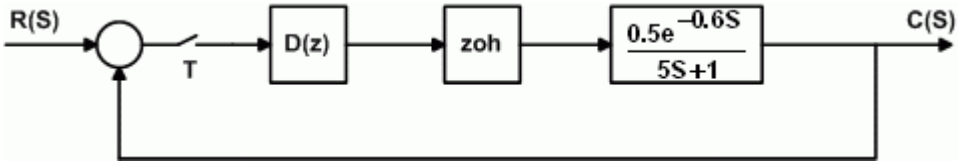


Figura 7.31 Sistema de Control para el problema 7.5

7.6 Los datos de la tabla adjunta corresponden a la respuesta en frecuencia del sistema dado en la figura 7.32 con $D(Z) = 1$ y $T = 0.1\,s$. a) Evalúe el margen de ganancia y el margen de fase del sistema con $D(Z) = 1$. b) Si $D(z) = K$, obtenga el valor de K para que el margen de fase sea igual a 53º. c) Diseñe un compensador que proporcione un margen de ganancia de al menos 10 db y un

margen de fase de 50º. d) Obtenga la respuesta del sistema ante un escalón unitario, con el compensador diseñado en la parte c.

w	1.0	1.3	1.6	2.0	2.5	3.6	4.0	5.0	6.2	6.3	8
v	1.0	1.3	1.603	2.006	2.513	3.639	4.054	5.106	6.406	6.517	8.455
$\|G(jv)\|$	6.705	4.833	3.656	2.647	1.869	1.006	0.833	0.531	0.365	0.354	0.221
$20\log\|G(jv)\|$	16.527	13.684	11.252	8.455	5.432	0.051	-1.587	-5.176	-8.754	-9.020	-13.112
θ	-119.4º	-126.7º	-133.2º	-140.7º	-148.5º	-161.3º	-164.9º	-172.5º	-179.8º	-180.4º	-188.8º

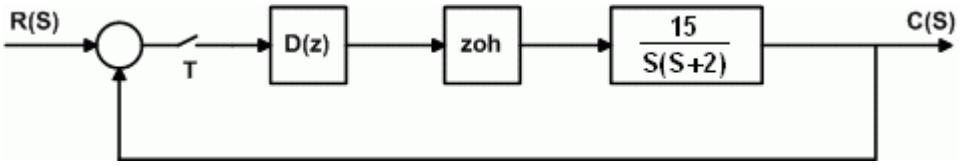


Figura 7.32 Sistema de Control para el problema 7.6

7.7 Suponga que en el problema 7.5 la dinámica del horno de cocción de cerámica es:

$$G_p(S) = \frac{0.6e^{-0.6S}}{6S+1}$$

Diseñe un compensador de modo que el sistema tenga margen de ganancia mínimo de 10db y margen de fase igual a 50º. Obtenga la respuesta del sistema cuando θ_r es un escalón unitario.

7.8 Para el sistema de control mostrado en la figura 7.28 asuma que:

$$G_p(S) = \frac{4}{S^2} \qquad\qquad T = 0.2\ s.$$

a) Diseñe un controlador de adelanto de fase para que el margen de fase del sistema sea al menos de 50º b) Es posible diseñar un compensador de atraso para el sistema utilizando el método de respuesta de frecuencia? Si no es posible explique por qué.

7.9 Para el sistema de control de la figura 7.28 asuma que:

$$G_p(S) = \frac{400K}{S(S+380)} \qquad T = 0.001\ s.$$

a) Determine el valor de K para que la constante de error estático de velocidad del sistema discreto sea $K_v = 800$. b) Con el valor de K calculado en la parte a) dibuje la respuesta del sistema ante un escalón unitario, calcule también el máximo sobreimpulso. c) Diseñe un compensador de adelanto para que el sistema tenga margen de fase de 50º y margen de ganancia de al menos 10db. Es posible el diseño?

7.10 La figura 7.33 muestra el diagrama en bloques del sistema de control de un motor de DC. a) obtenga la función de transferencia de pulso para el motor. b) Calcule el rango de $K > 0$ para el cual el sistema es estable. c) Determine el valor de K de modo que el error de estado estable del sistema sea 0.1. Con este valor de K se obtiene un sistema estable? d) Diseñe un compensador de modo que el sistema tenga polos dominantes de lazo cerrado con coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.6$ y tiempo de pico igual a 1 s. Utilice el método del lugar geométrico de las raíces.

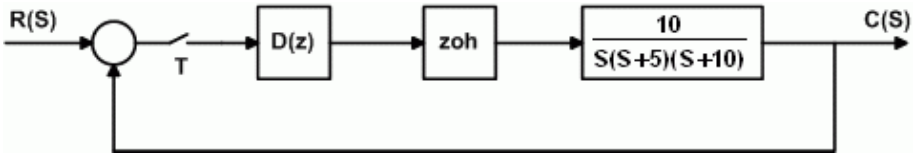


Figura 7.33 Motor de DC para el problema 7.10

7.11 La función de transferencia de un control derivativo puro es:

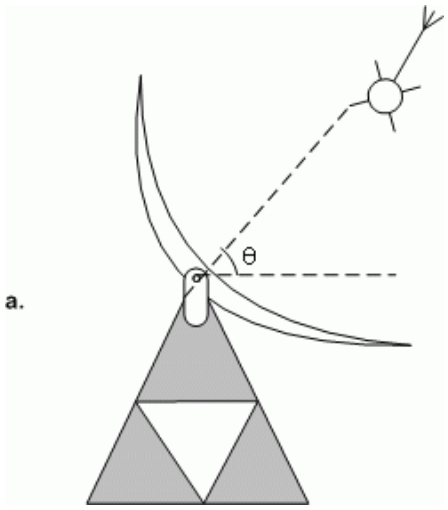
$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{K_c\tau_d(z-1)}{Tz}$$

El polo en $z = 0$ adiciona un atraso de fase que puede producir alguna inestabilidad. Parecería ventajoso suprimir este polo y utilizar un control derivativo con función de transferencia:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{K_c \tau_d (z-1)}{T}$$

Se puede hacer esto? Sustente su respuesta con la ecuación de diferencias necesaria para implementar el controlar y discuta los requerimientos para ello [7.6]

7.12 La figura 7.34a corresponde al diagrama de una antena para comunicaciones vía satélite y la figura 7.34b muestra el diagrama de bloques para su control digital. Diseñar, para este sistema, un compensador de modo que el error ante una entrada en rampa unitaria sea menor o igual a 0.01 rad, el máximo sobreimpulso menor o igual a 16% y el tiempo de establecimiento sea de 8 s.



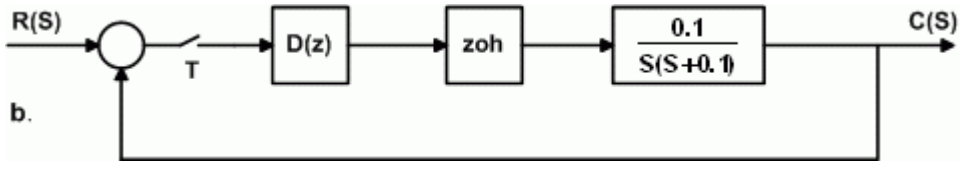


Figura 7.34 Modelo de la antena para el problema 7.12

7.13 Para el sistema descrito en el problema 7.12, diseñe un compensador, utilizando el método de Ragazzini, de modo que el sistema en lazo cerrado tenga:

tiempo de crecimiento de 6 s, sobreimpulso máximo menor o igual al 10% y coeficiente estático de error de velocidad igual a 10.

7.14 La figura 7.35 representa el sistema de control de velocidad de un auto: a) diseñe un controlador PD de manera que el sistema tenga tiempo de crecimiento igual a 5 s. y coeficiente de amortiguamiento $\xi = 1$. b) Diseñe un controlar PID para cumplir las especificaciones establecidas en la parte a) pero con error de estado estable igual a cero. Asuma que $T = 0.1\ s$.
Asuma que las ecuaciones para los controladores son:

Control PD: $$D(z) = \frac{K_C(T + \tau_d)}{Tz}\left[z - \frac{\tau_d}{T + \tau_d}\right]$$

T es el periodo de muestreo, K_c es la ganancia, y τ_d el tiempo derivativo.

Control PID $$D(z) = \frac{q_o z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)}$$

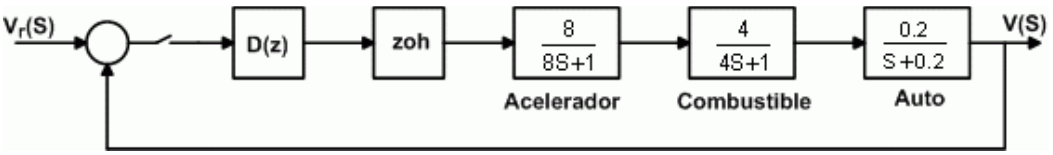


Figura 7.35 Sistema de control de velocidad de un auto

7.15 La dinámica de cierto proceso químico está dada por:

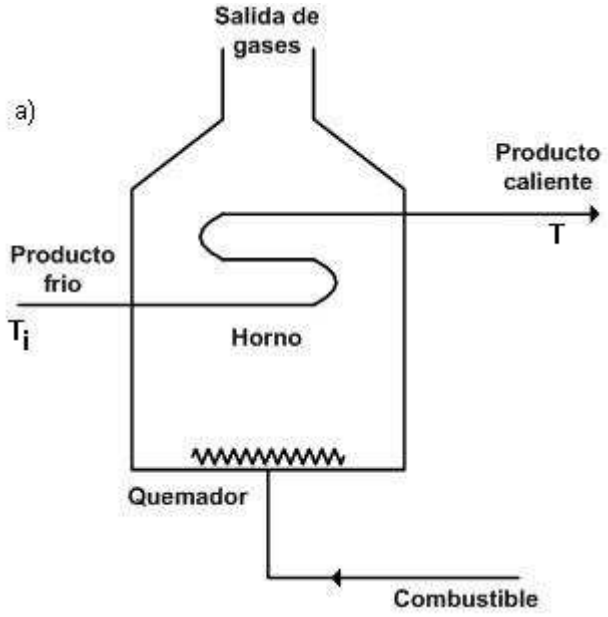
$$G_p(S) = \frac{1}{(S + 0.1)(S + 4)}$$

El proceso se va a controlar con un controlador digital con un período de muestreo $T = 0.1\ s$ a) Diseñe un compensador utilizando el método del lugar de las raíces de modo que la respuesta del sistema, a un escalón unitario, tenga tiempo de crecimiento ≤ 1 s y máximo sobreimpulso $\leq 5\%$. b) utilice el método de Ragazzini y diseñe un compensador para cumplir las condiciones dadas en el literal a)

7.16 La figura 7.36a representa un horno en el cual el material que entra a temperatura T_i debe salir a temperatura T. En el horno se puede manipular el flujo de combustible F hacia el elemento calefactor para lograr que la temperatura final T del material alcance el valor deseado.

La figura 7.36b muestra la respuesta de la temperatura del horno al incrementar la apertura de la válvula de control de combustible en un 10%. La temperatura se mide con un transmisor con rango de 0 a 100 ºC. El proceso se muestreo cada 0.2 min.

a) Obtenga la función de transferencia del sistema aproximándola a un sistema de segundo orden. b) Dibuje el diagrama de instrumentación necesario para realizar el control digital de la temperatura del horno y el diagrama de bloques correspondiente en lazo cerrado. c) Calcular la ganancia máxima que se le puede dar al controlador digital para estabilidad límite del sistema. d) Si los cambios en T_i son significativos, diseñe un controlador PI de modo que los polos dominantes de lazo cerrado del sistema tengan coeficiente de amortiguamiento de 0.8 y tiempo de establecimiento de 3 min. Utilice el método del lugar geométrico de las raíces para realizar el diseño.



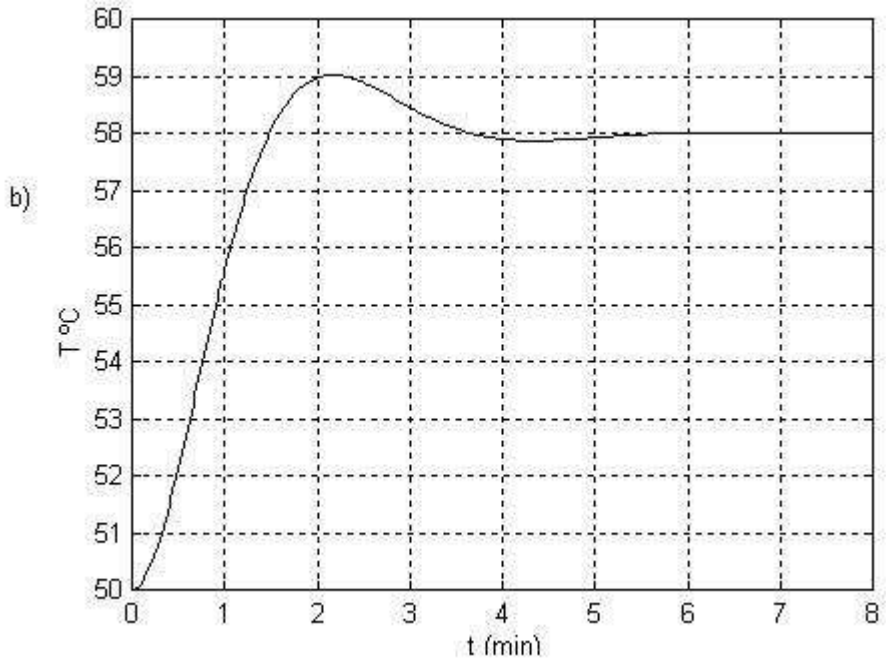


Figura 7.36 Horno para el problema 7.16

REFERENCIAS

[7.1] Kuo, Benjamín. *Sistemas de control automático*. Prentice Hall. Mexico 1996.

[7.2] Phillips, Charles. Nagle Troy*. Digital control systems analysis and design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, new Jersey 1995.

[7.3] Phillips, Charles. Nagle Troy. *Digital control systems analysis and design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, new Jersey 1995.

[7.4] Phillips, Charles. Nagle Troy. *Digital control systems analysis and design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, new Jersey 1995.

[7.5] Franklin, Gene. Powell, David. *Digital control of dynamics systems*. Addison Wesley Publishing Company. Massachusetts 1994.

[7.6] Franklin, Gene. Powell, David. *Digital control of dynamics systems*. Addison Wesley Publishing Company. Massachussets 1994.

CAPITULO OCHO

ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO

Este método tiene como objetivo la descripción de un sistema en función de n ecuaciones en diferencias o diferenciales de primer orden, las cuales pueden combinarse para formar una ecuación matricial en diferencias o diferencial de primer orden.

El diseño de sistemas en el espacio de estado se puede realizar con todo tipo de entradas, permite incluir condiciones iniciales y analizar los sistemas de control con respecto a índices de desempeño dados.

Para un mayor entendimiento del concepto de estado se definen a continuación algunos términos [8.1].

Estado: el estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables, tales que el conocimiento de dichas variables en $t = t_o$ junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_{o,}$ determinan completamente el comportamiento dinámico del sistema para $t \geq t_o$.

Variables de Estado: son las variables que conforman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado de un sistema dinámico. Las variables de estado no necesitan ser cantidades físicamente medibles u observables. Pero, en la práctica, es conveniente seleccionar como variables de estado a cantidades que sean fácilmente medibles.

Vector de Estado: es el vector formado por el conjunto de las n variables de estado $x_1, x_2 \ldots x_n$ que sean necesarias para determinar completamente el comportamiento del sistema.

En la figura 8.1a las variables $u_i(k), i = 1 \ldots r$, representan las entradas que comandan al sistema, las variables $y_i(k), i = 1 \ldots m$, representan las salidas o respuestas del sistema y las variables $x_i(k), i = 1 \ldots n$, representan las variables internas o variables de estado del sistema.

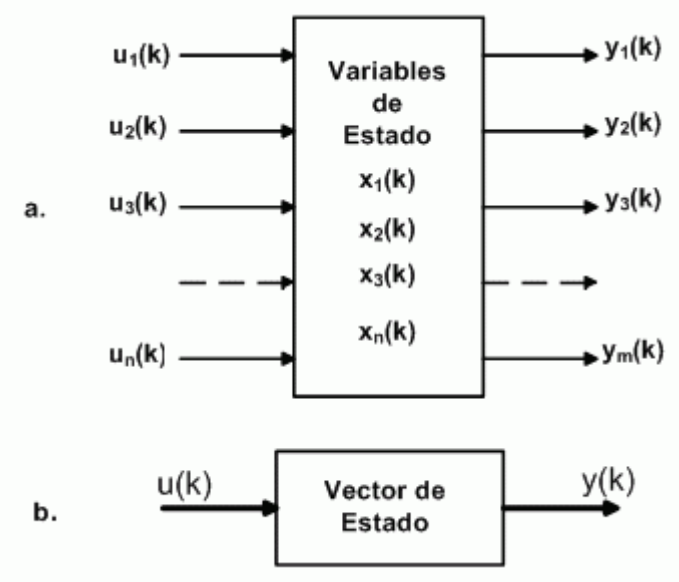


Figura 8.1 Representación de un sistema dinámico a) Representación con las variables de estado. b) Representación con el vector de estado.

Por conveniencia, el sistema de la figura 8.1a se puede representar como se muestra en la figura 8.1b en donde $u(k)$ es el vector de entrada, $y(k)$ es el vector de salida y $x(k)$ es el vector de estado es decir:

$$u(k)=\begin{bmatrix}u_1(k)\\u_2(k)\\\cdot\\\cdot\\u_r(k)\end{bmatrix} \qquad y(k)=\begin{bmatrix}y_1(k)\\y_2(k)\\\cdot\\\cdot\\y_m(k)\end{bmatrix} \qquad x(k)=\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\\cdot\\\cdot\\y_n(k)\end{bmatrix} \qquad 8.1$$

En general, la ecuación que describe el estado de un sistema de tiempo discreto, en el instante $k+1$ se puede escribir en la forma:

$$x(k+1)=f[x(k),u(k)] \qquad 8.3$$

Así mismo, la salida del sistema se puede dar como:

$$y(k)=g[x(k),u(k)] \qquad 8.3$$

Para los sistemas lineales de tiempo discreto variantes en el tiempo, la ecuación de entrada y la ecuación de salida se pueden escribir así:

$$x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)u(k) \qquad 8.4$$

$$y(k)=C(k)x(k)+D(k)u(k) \qquad 8.5$$

En donde:
- $x(k)$ = Vector de estado (vector n)
- $y(k)$ =Vector de salida (vector m)
- $u(k)$ = Vector de entrada (vector r)
- $A(k)$ = Matriz de estado (matriz $n \times n$)
- $B(k)$ = Matriz de entrada (matriz $n \times r$)
- $C(k)$ = Matriz de salida (matriz $m \times n$)
- $D(k)$ = Matriz de transmisión directa (matriz $m \times r$)

La variable k en el argumento de las matrices $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ y $D(k)$ indica que estas matrices varían en el tiempo. Si se tiene un sistema de tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo, dichas matrices son constantes y las ecuaciones de estado y salida del sistema se pueden escribir como:

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \qquad 8.6$$

$$y(k)=Cx(k)+Du(k) \qquad 8.7$$

En la representación por variable de estados de un sistema lineal, con matrices A, B, C y D, las matrices A y C describen el comportamiento no-forzado del sistema

(o el comportamiento a entrada-cero), mientras que la matriz B caracteriza el efecto de la entrada (o el control) sobre la dinámica del sistema. La matriz D representa la transmisión directa de la entrada a la salida.

La figura 8.2 representa el diagrama en bloques de un sistema de control discreto definido por las ecuaciones 8.6 y 8.7.

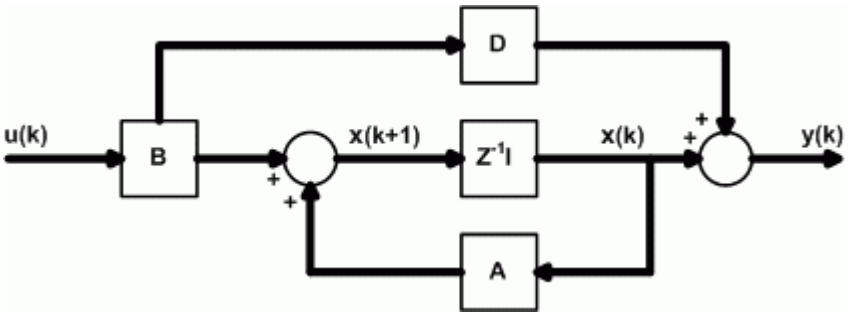


Figura 8.2 Diagrama en bloques de un sistema de tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo

8.1 FORMAS CANÓNICAS PARA ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO EN TIEMPO DISCRETO

Sea el sistema en tiempo discreto definido por la ecuación de diferencias:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots a_n y(k-n) = b_o u(k) + b_1 u(k-1) \cdots + b_n u(k-n) \quad 8.8$$

En donde $u(k)$ es la entrada y $y(k)$ es la salida del sistema en el instante de muestreo k. La función de transferencia de pulso correspondiente a la ecuación 8.8 está dada por:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \cdots + a_n z^{-n}} \quad 8.9$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_o z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} \cdots + a_n} \quad 8.10$$

Existen diferentes formas para representar el sistema discreto definido por las ecuaciones 8.8, 8.9 y 8.10. Las más utilizadas son las llamadas **formas canónicas** a saber: forma canónica controlable, forma canónica observable, forma canónica diagonal y forma canónica de Jordan [8.2].

8.1.1 Forma Canónica Controlable: la representación en el espacio de estado del sistema en tiempo discreto definido por las ecuaciones 8.8, 8.9 u 8.10 se puede expresar en la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdot & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad 8.11$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_o \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_o \quad \cdot \quad b_1 - a_1 b_o] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_o u(k)$$

Otra representación en forma canónica controlable es:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdot & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad 8.12 \text{ forma de}$$

$$y(k) = [b_1 - a_1 b_o \quad b_2 - a_2 b_o \quad \cdot \quad b_n - a_n b_o] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_o u(k)$$

8.1.2 Forma Canónica Observable: la representación en el espacio de estado del sistema en tiempo discreto definido por las ecuaciones 8.8, 8.9 u 8.10 se puede expresar en la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_o \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_o \\ \cdot \\ \cdot \\ b_2 - a_2 b_o \\ b_1 - a_1 b_o \end{bmatrix} u(k) \qquad 8.13$$

$$y(k) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdot \quad 1]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_o u(k)$$

Una forma alterna para representar un sistema en forma canónica observable es:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_o \\ b_2 - a_2 b_o \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_o \\ b_n - a_n b_o \end{bmatrix} u(k) \qquad 8.14$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdot \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_o u(k)$$

8.1.3 Forma Canónica Diagonal: si los polos de la función de transferencia de pulso dada por la ecuación 8.10 son todos distintos, es decir, si ella se puede expandir en fracciones parciales en la forma:

$$G(z) = \frac{C_1}{z - p_1} + \frac{C_2}{z - p_2} + \cdots \frac{C_n}{z - p_n} + b_o \qquad 8.15$$

La representación en el espacio de estado definido por las ecuaciones 8.8, 8.9 u 8.10 se puede expresar en la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & p_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad 8.16$$

$$y(k) = [C_1 \quad C_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad C_n]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_o u(k) \qquad 8.17$$

8.1.4 Forma Canónica de Jordan: Si al descomponer en fracciones parciales la función de transferencia dada por la ecuación 8.10 se obtiene un polo múltiple de orden r en $z = p_1$ y todos los demás polos son distintos, es decir:

$$G(z) = \frac{C_1}{(z-p_1)^r} + \frac{C_2}{(z-p_1)^{r-1}} + \cdots \frac{C_r}{z-p_1} + \frac{C_{r+1}}{z-p_{r+1}} + \frac{C_{r+2}}{z-p_{r+2}} + \cdots \frac{C_n}{z-p_n} + b_0 \quad 8.18$$

La representación en el espacio de estado definido por las ecuaciones 8.8, 8.9 u 8.10 se puede expresar en la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdot \\ x_r(k+1) \\ x_{r+1}(k+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & \cdot & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdot & 0 & p_{r+1} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ x_r(k) \\ x_{r+1}(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad 8.19$$

$$y(k) = [C_1 \quad C_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad C_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_o u(k) \quad 8.20$$

EJEMPLO 8.1

Dado el sistema:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + 2z + 5}{(z+1)(z+2)(z+3)}$$

a) Obtener su representación en el espacio de estado en las formas canónicas controlable, observable y diagonal b) Construya el diagrama de flujo que corresponde a cada representación.

SOLUCIÓN: el sistema dado puede escribirse en la forma:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + 2z + 5}{z^3 + 8z^2 + 19z + 12}$$

En donde $a_1 = 8$, $a_2 = 19$, $a_3 = 12$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ y $b_3 = 5$ (ver ecuación 8.10)

a) Las ecuaciones 8.11 y 8.12 dan la forma canónica controlable así:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

La figura 8.3a muestra el diagrama de flujo de señales del sistema representado en la forma canónica controlable.

Las ecuaciones 8.13 y 8.14 permiten representar el sistema en la forma canónica observable así:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

La figura 8.3b muestra el diagrama de flujo de señales del sistema representado en la forma canónica observable.

Como los polos de la función de transferencia del sistema son todos distintos, la representación del mismo, en su forma canónica diagonal, se obtiene expandiendo $G(z)$ en fracciones parciales:

$$G(z) = \frac{2/3}{z+1} - \frac{4}{z+3} + \frac{13/3}{z+4}$$

Utilizando las ecuaciones 8.16 y 8.17 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 2/3 & -4 & 13/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

b) Diagramas de flujo

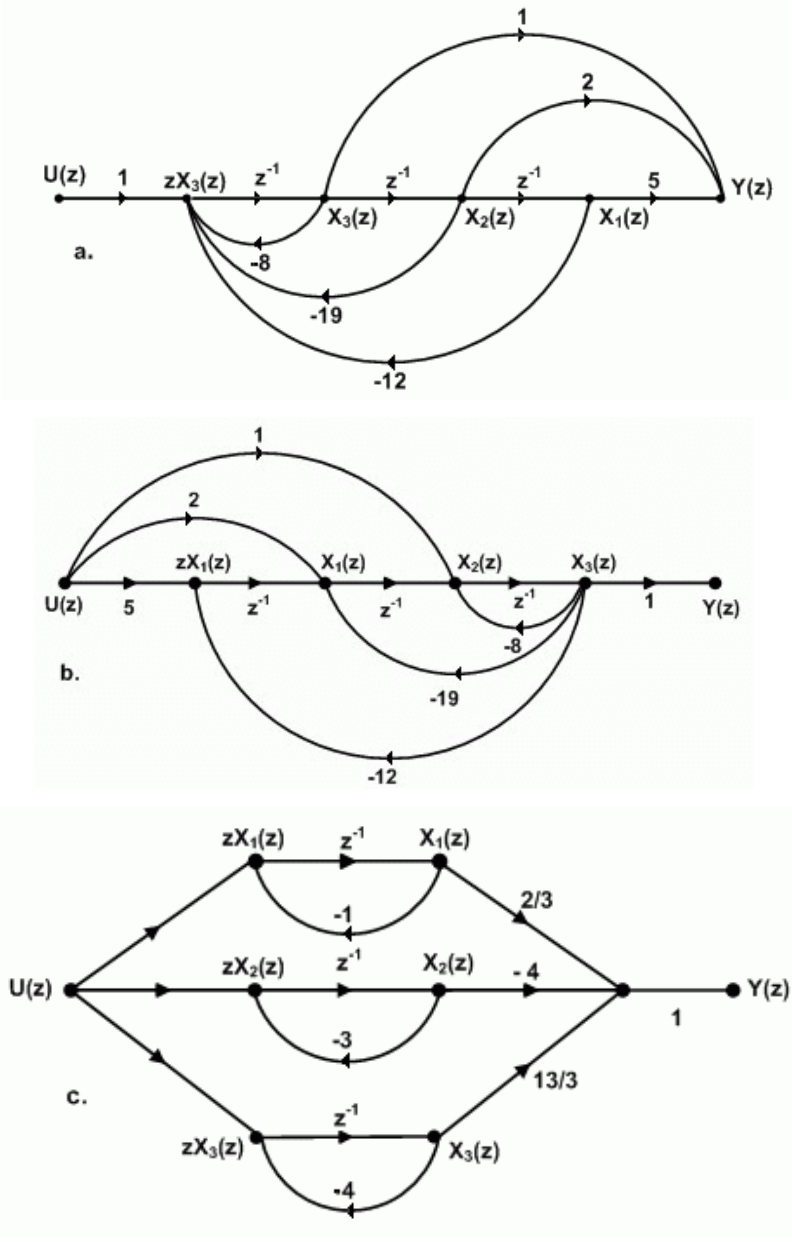


Figura 8.3 Diagrama de flujo de señales a) Forma canónica controlable b) Forma canónica observable c) Forma canónica diagonal

8.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO Y REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADO.

Como se ha visto, la representación en el espacio de estado de un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo se puede expresar en la forma:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad 8.21$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad 8.22$$

Tomando la transformada z a las ecuaciones 8.21 y 8.22 se obtiene:

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

La definición de la función de transferencia considera que las condiciones iniciales son iguales a cero, entonces:

$$(zI - A)X(z) = BU(z)$$

Premultiplicando por $(zI - A)^{-1}$ se obtiene:

$$X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z)$$

Es decir:

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1}BU(z) + DU(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z)$$

Como $u(k)$ es la entrada al sistema e $y(k)$ su salida, la función de transferencia del mismo será:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1}B + D \quad 8.23$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{C[adj(zI - A)]B}{|zI - A|} \quad 8.24$$

De la ecuación 8.24 se deduce que la ecuación característica del sistema es:

$$|zI - A| = 0 \quad 8.25$$

$$|zI - A| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots a_{n-1} z + a_n = 0 \quad 8.26$$

EJEMPLO 8.2

Hallar la función de transferencia de pulso del sistema cuyo comportamiento dinámico está descrito mediante la ecuación:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.4 & 0.3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0.5]x(k)$$

SOLUCIÓN: La función de transferencia del sistema es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1}B + D$$

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.4 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - 0.8 & -0.5 \\ 0.4 & z - 0.3 \end{bmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{adj(A)}{|zI - A|} = \frac{\begin{bmatrix} z - 0.3 & 0.5 \\ -0.4 & z - 0.8 \end{bmatrix}}{(z - 0.8)(z - 0.3) + 0.2} = \frac{\begin{bmatrix} z - 0.3 & 0.5 \\ -0.4 & z - 0.8 \end{bmatrix}}{z^2 - 1.1z + 0.44}$$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B = \frac{[1 \quad 0.5]\begin{bmatrix} z - 0.3 & 0.5 \\ -0.4 & z - 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}}{z^2 - 1.1z + 0.44}$$

$$G(z) = \frac{0.9z - 0.24}{z^2 - 1.1z + 0.44}$$

Si se quiere resolver el problema mediante el Matlab se puede utilizar el siguiente programa:

```
A = [0.8   0.5; -0.4   0.3];
B = [0.6; 0.6];
C = [1   0.5];
D = [0];
[n, d] = ss2tf(A,B,C,D) ;
printsys (n, d, `z´)
```

8.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE ESTADO EN TIEMPO DISCRETO.

Existen dos técnicas fundamentales para resolver ecuaciones de estado en tiempo discreto: una que utiliza el método recursivo y otra, que utiliza el método de la transformada z [8.3]

8.3.1 Método Recursivo: Considerando la ecuación de estado en tiempo discreto e invariante en el tiempo:

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 8.27$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad 8.28$$

Es obvio que para $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$

$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$

$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$

Entonces:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{(k-1-j)}\, Bu(j) \qquad 8.29$$

La ecuación 8.29 es, entonces, la solución general de la ecuación 8.27. Además, de 8.29 se obtiene:

$$y(k) = CA^k x(0) + C\sum_{j=0}^{k-1} A^{(k-1-j)}\, Bu(j) \qquad 8.30$$

La matriz A^k se denomina "Matriz de Transición de Estado" y se puede expresar como:

$$\phi(k) = A^k \qquad 8.31$$

Reemplazando la ecuación 8.31 en la 8.29 y la 8.30 se obtiene:

$$x(k) = \phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \phi(k-1-j)\, Bu(j) \qquad 8.32$$

$$y(k) = C\phi(k)x(0) + C\sum_{j=0}^{k-1} \phi(k-1-j)\, Bu(j) \qquad 8.33$$

EJEMPLO 8.3

Resolver, utilizando el método recursivo, la ecuación de estado en tiempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0]x(k)$$

Asumiendo que $x(0) = 0$ y que $u(k) = 1$ para $k \geq 0$

Asumiendo que x(0) = 0 y que u(k) = 1 para k ≥ 0.

SOLUCIÓN: El procedimiento es el siguiente:

$y(0) = [1 \quad 0]x(0) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$$x(1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(1) = [1 \quad 0] x(1) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} x(1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$

$$y(2) = [1 \quad 0] x(2) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.4 \end{bmatrix} = 1.5$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} x(2) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(2) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 1.67 \\ -0.92 \end{bmatrix}$$

$$y(3) = [1 \quad 0] x(3) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1.67 \\ -0.92 \end{bmatrix} = 1.67$$

El ejemplo anterior se puede resolver con MATLAB, mediante el siguiente programa:

```
% Solución de ecuación de estado
clc
a=[0.5 0.2;-0.4 0.8];
b = [1 ; 0];
c = [1   0];
d = [0];
x = [0 ; 0],                          % condiciones iniciales
u = 1;                                % valor de la entrada
for  K = 0: 10,
x1 = a*x + b*u ;
y = c * x
x = x1;
end
```

8.3.2 Método de la Transformada z: Considerando el sistema descrito por la ecuación de estado:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Tomando la transformada Z se obtiene:

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$$

$$(zI - A)X(z) = zx(0) + BU(z)$$

Premultiplicando por $(zI - A)^{-1}$se obtiene:

$$X(z) = (zI - A)^{-1}zx(0) + (zI - A)^{-1}BU(z)$$

Tomando la Transformada z inversa se obtiene:

$$x(k) = \Im^{-1}[(zI - A)^{-1}z]x(0) + \Im^{-1}[(zI - A)^{-1}BU(z)] \qquad 8.34$$

Comparando término a término las ecuaciones 8.34 y 8.32 se obtiene que:

$$\phi(k) = A^k = \Im^{-1}[(zI - A)^{-1}z] \qquad 8.35$$

EJEMPLO 8.4

Hallar la matriz de transición y resolver la ecuación de estado para el sistema descrito por la ecuación:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0]x(k)$$

Asumiendo que $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ y que $u(k) = 1$ para $k \geq 0$.

SOLUCIÓN: La matriz de transición $\phi(k)$ está dada por:

$$\phi(k) = \Im\{(zI - A)^{-1}z\}$$

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - 0.5 & 0 \\ 0.4 & z - 0.8 \end{bmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{adj[(zI - A)]}{|zI - A|} = \frac{\begin{bmatrix} z - 0.8 & 0 \\ -0.4 & z - 0.5 \end{bmatrix}}{(z - 0.5)(z - 0.8)}$$

$$(zI - A)^{-1}z = \begin{bmatrix} \dfrac{z}{z - 0.5} & 0 \\ \dfrac{-0.4z}{(z - 0.5)(z - 0.8)} & \dfrac{z}{z - 0.8} \end{bmatrix}$$

$$\phi(k) = \Im^{-1}[(zI - A)^{-1}z] = \begin{bmatrix} (0.5)^k & 0 \\ \dfrac{4}{3}(0.5)^k - \dfrac{4}{3}(0.8)^k & (0.8)^k \end{bmatrix}$$

La solución de la ecuación de estado se obtiene así:

$$X(z) = (zI - A)^{-1}[zx(0) + BU(z)]$$

$$zx(0) + BU(z) = z\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\frac{z}{z-1} = \begin{bmatrix}\frac{z^2}{z-1}\\0\end{bmatrix}$$

$$X(z) = \frac{\begin{bmatrix}z-0.8 & 0\\ -0.4 & z-0.5\end{bmatrix}}{(z-0.5)(z-0.8)} \cdot \begin{bmatrix}\frac{z^2}{z-1}\\0\end{bmatrix}$$

$$X(z) = \begin{bmatrix}\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}\\ \frac{-0.4z^2}{(z-1)(z-0.5)(z-0.8)}\end{bmatrix}$$

$$x(k) = \Im^{-1}[X(z)] = \begin{bmatrix}2-(0.5)^k\\ \frac{16}{3}(0.8)^k - \frac{4}{3}(0.5)^k - 4\end{bmatrix}$$

$$y(k) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix} = x_1(k) \qquad y(k) = 2-(0.5)^k$$

8.4 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO

En muchos casos, es necesario convertir ecuaciones de estado en tiempo continuo a ecuaciones de estado en tiempo discreto con el fin de diseñar sistemas de control digital que permitan alcanzar el comportamiento deseado del sistema. A continuación, se presenta un procedimiento, que posibilita realizar tal operación [8.4]

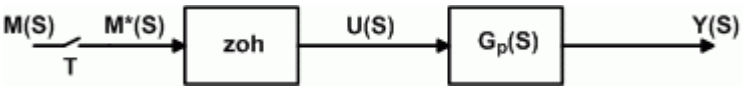


Figura 8.4 Sistema con muestreador y retenedor de orden cero.

Las ecuaciones de estado para la parte continua del sistema mostrado en la figura 8.4 son:

$$\dot{v}(t) = A_c v(t) + B_c u(t) \qquad 8.36$$

$$y(t) = C_c v(t) + D_c u(t) \qquad 8.37$$

La solución de la ecuación 8.36 es:

$$v(t) = \phi_c(t - t_o)v(t_o) + \int_{t_o}^{t} \phi_c(t - \tau)B_c\, u(\tau)d\tau \qquad 3.38$$

En donde t_o es el tiempo inicial y

$$\phi_c(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(SI - A)^{-1}] \qquad 8.39$$

Para obtener el modelo discreto del sistema, se debe evaluar la ecuación 8.38 en $t = T + kT$, con $kT = t_o$ y $u(t) = m(kT)$ que corresponde a la entrada del sistema en el intervalo de tiempo $kT \leq t \leq kT + T$.

Se hace notar que este procedimiento es válido sólo si $u(t)$ es la salida de un retenedor de orden cero.

Entonces:

$$v(T + kT) = \phi_c(T)v(kT) + m(kT)\int_{kT}^{T+kT} \phi_c\,(T + kT - \tau)B_c d\tau \qquad 8.40$$

Al comparar la ecuación 8.40 con la ecuación de estado de tiempo discreto:

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 8.41$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad 8.42$$

Se obtiene que:

$$x(k) = v(kT)$$

$$A = \phi_c(T) \qquad 8.44$$

$$B = \int_{kT}^{T+kT} \phi_c\,(T + kT - \tau)B_c d\tau$$

La ecuación de salida dada en 8.37, evaluada en $t = kT$ es:

$$y(kT) = C_c x(kT) + D_c u(kT)$$

$$y(kT) = C_c x(kT) + D_c m(kT) \qquad 8.44$$

Es decir, las matrices C y D del sistema en tiempo discreto son iguales a las matrices C_c y D_c del sistema continuo.

Las matrices A y B se pueden evaluar a partir del cálculo de $\phi_c(t)$ utilizando directamente las ecuaciones 8.39 y 8.43

Si se utiliza un programa de computador, el cálculo de $\phi_c(t)$ se puede efectuar utilizando la expresión:

$$\phi_c(T) = e^{A_c T} = I + A_c T + \frac{A_c^2 T}{2!} + \frac{A_c^3 T}{3!} + \cdots \qquad 8.45$$

La ecuación 8.45 es una serie convergente que se puede truncar una vez se alcance la precisión adecuada.

EJEMPLO 8.5

Para el sistema muestreado dado en la figura 8.4, asuma que:

$$G_p(S) = \frac{10}{S(10S+1)} \qquad T = 1\ s.$$

Obtener: a) La ecuación de estado de tiempo continuo del sistema b) La ecuación de estado de tiempo discreto c) La respuesta del sistema continuo y la del sistema discreto cuando se le aplica un escalón unitario a la entrada.

SOLUCIÓN: La función de transferencia del sistema continuo se puede escribir como:

$$G_p(S) = \frac{10}{S(10S+1)} = \frac{1}{S^2 + 0.1S}$$

La ecuación de estado correspondiente, escrita en la forma canónica controlable es:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

La matriz $\phi_c(t)$ se calcula con la ecuación 8.39:

$$\phi_c(t) = \mathcal{L}^{-1}[(SI - A_c)^{-1}]$$

$$(SI - A_c) = \begin{bmatrix}S & -1\\ 0 & S + 0.1\end{bmatrix} \qquad (SI - A_c)^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{S} & \frac{1}{S(S+0.1)}\\ 0 & \frac{1}{(S+0.1)}\end{bmatrix}$$

$$\phi_c(T) = \mathcal{L}^{-1}[(SI - A_c)^{-1}]_{t=T} = \begin{bmatrix}1 & 10 - 10e^{-0.1T}\\ 0 & e^{-0.1T}\end{bmatrix}$$

$$\int_0^T \phi_c(\tau)\, d\tau = \begin{bmatrix}T & 10T + 100e^{-0.1T} - 100\\ 0 & -10e^{-0.1T} + 10\end{bmatrix}$$

Para $T = 1\ s$ se obtiene:

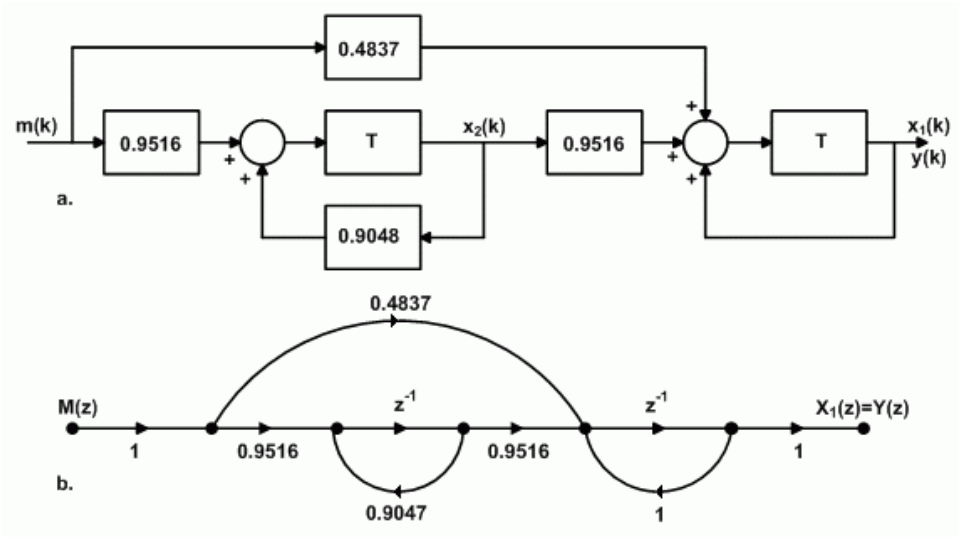
$$A = \phi_c(T)|_{T=0.1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9516 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix}$$

$$B = \left[\int_0^T \phi_c(\tau)d\tau\right] B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0.4837 \\ 0 & 0.9516 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4837 \\ 0.9516 \end{bmatrix}$$

Así, la ecuación de estado en tiempo discreto es:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.9516 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.4837 \\ 0.9516 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [1 \quad 0]x(k)$$

La figura 8.5a muestra el diagrama en bloques para el sistema del ejemplo 8.5 y la figura 8.5b el diagrama de flujo correspondiente.



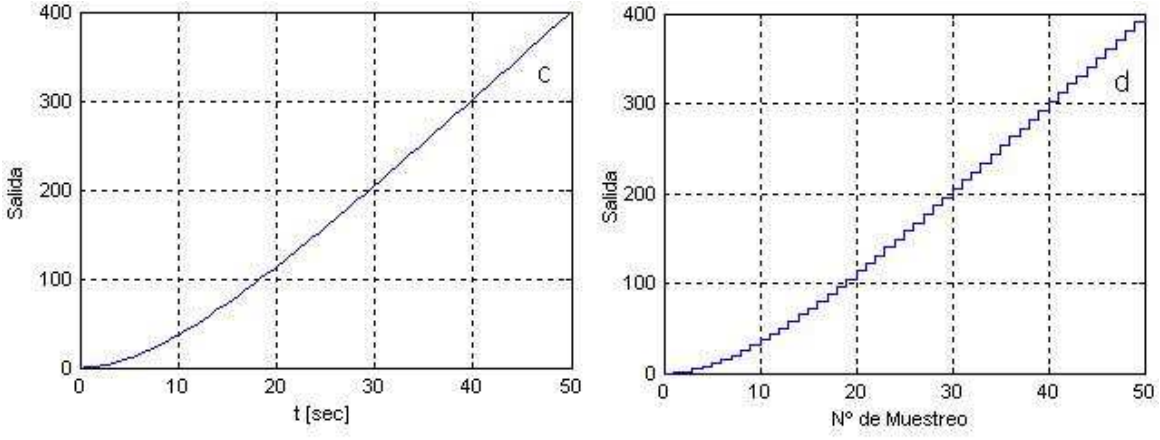


Figura 8.5 a) Diagrama en bloques b) Diagrama de flujo de señales c) Respuesta del sistema continuo d) Respuesta del sistema discreto del ejemplo 8.5

El ejemplo anterior se puede resolver en MATLAB utilizando el siguiente programa:

```
n =  [1];
d = [1   0.1   0];
[A, B,C, D]  =tf2ss(n,d);
[Ad, Bd, Cd, Dd] = c2dt(A,B,C,1,0)
subplot(2,2,1)
step(n,d)
grid
subplot(2,2,2)
dstep(Ad,Bd,Cd,Dd)
grid
```

Para discretizar se utiliza el comando: c2dt(A,B,C,T,r) en donde T es el período de muestreo ($T = 1\ s$ en este caso) y r es el tiempo muerto del sistema (r = 0 en este caso).

8.5 TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES DE ESTADO A FORMAS CANÓNICAS

Como se ha visto, para un mismo sistema existen diferentes formas de representación en el espacio de estado. Esta observación permite deducir que las diferentes ecuaciones de estado en tiempo discreto con las cuales se puede definir el comportamiento dinámico del sistema, están relacionadas unas con otras mediante una transformación de similitud [8.5]

Sea el sistema en tiempo discreto definido por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 8.46$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad 8.47$$

Si se define un nuevo vector de estado tal que:

$$x(k) = P\hat{x}(k) \qquad 8.48$$

y se sustituye la ecuación 8.48 en la 8.46 se obtiene:

$$P\hat{x}(k) = AP\hat{x}(k) + Bu(k) \qquad 8.49$$

Premultiplicando ambos miembros de la ecuación 8.49 por P^{-1} resulta:

$$\hat{x}(k+1) = P^{-1}AP\hat{x}(k) + P^{-1}Bu(k) \qquad 8.50$$

Reemplazando ahora la ecuación 8.48 en la 8.47 da:

$$y(k) = CP\hat{x}(k) + Du(k) \qquad 8.51$$

Finalmente haciendo:

$$\hat{A} = P^{-1}AP \qquad \hat{B} = P^{-1}B \qquad \hat{C} = CP \qquad \hat{D} = D$$

Se obtiene:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \qquad 8.52$$

$$y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}u(k) \qquad 8.53$$

En conclusión, las ecuaciones definidas por 8.46 y 8.47 son equivalentes a las ecuaciones definidas por 8.52 y 8.53. Los vectores $x(k)$ y $\hat{x}(k)$ están relacionados entre si por la ecuación 8.48.

8.5.1 Transformación a la forma Canónica Controlable: Sea el sistema en tiempo discreto definido por las ecuaciones:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 8.54$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad 8.55$$

Dicho sistema se puede transformar a la forma canónica controlable utilizando la matriz de transformación [8.3].

$$Q = TV \qquad 8.56$$

En donde:

$$T = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \qquad 8.57$$

$$V = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 8.58$$

En donde los elementos a_i que forman a la matriz V son los coeficientes de la ecuación característica:

$$|zI - A| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad 8.59$$

El sistema en la forma canónica controlable está dado por:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \qquad 8.60$$

$$y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}u(k) \qquad 8.61$$

En donde:

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ \qquad \hat{B} = Q^{-1}B$$
$$\hat{C} = CQ \qquad \hat{D} = D \qquad 8.62$$

8.5.2 Transformación a la forma Canónica Observable: El sistema en tiempo discreto definido por las ecuaciones 8.54 y 8.55 se puede transformar a la forma canónica observable utilizando la matriz de transformación

$$Q = (VT^*)^{-1} \qquad 8.63$$

En donde:

$$T = [C^* \quad A^*C^* \quad (A^*)^2C^* \quad \cdots \quad (A^*)^{n-1}C^*] \qquad 8.64$$

La matriz V está dada por la ecuación 8.58 y los a_i son los coeficientes de la ecuación característica del sistema dados en 8.59. T^* es la matriz conjugada transpuesta de T.

El sistema en la forma canónica controlable está dado por:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \qquad 8.65$$

$$y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}u(k) \qquad 8.66$$

En donde:

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ \qquad \hat{B} = Q^{-1}B$$
$$\hat{C} = CQ \qquad \hat{D} = D \qquad 8.67$$

8.5.3 Transformación a la forma Canónica Diagonal: Si todos los valores característicos de la matriz A son diferentes, es decir, si todas las raíces de la ecuación característica son distintas, los vectores propios $V_1, V_2 \cdots V_n$ de la matriz A también son distintos. En este caso, la matriz de transformación es V tal que: [8.4].

$$V = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad \cdots \quad V_n] \tag{8.68}$$

y:

$$V^{-1}AV = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & p_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & p_n \end{bmatrix} \tag{8.69}$$

El sistema en la forma canónica diagonal está dado por:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \tag{8.70}$$

$$y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}u(k) \tag{8.71}$$

De esta manera, las ecuaciones de estado diagonalizadas se pueden escribir en la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdot \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & p_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix} u(k) \tag{8.73}$$

$$y(k) = [C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix} \tag{8.74}$$

En donde $\beta_i C_i$ corresponde a las constantes que forman el numerador del polo en $z = p_i$ al descomponer $G(Z)$ en fracciones parciales así:

$$G(z) = \frac{\beta_1 C_1}{z - p_1} + \frac{\beta_2 C_2}{z - p_2} + \cdots \frac{\beta_n C_n}{z - p_n} + D \tag{8.75}$$

En la práctica se hace: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots \beta_n = 1$

EJEMPLO 8.6

La dinámica de cierto proceso de flujo está definida por la ecuación de estado de tiempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(k)$$

$$\varphi(k) = [0 \quad 1 \quad 0.5]x(k)$$

a) Determinar la función de transferencia de pulso del proceso. b) Obtener la ecuación de estado del sistema en sus formas canónicas controlable, observable y diagonal, utilizando las respectivas matrices de transformación.

SOLUCIÓN: a) La función de transferencia de pulso del sistema está dada por:

$$G(z) = \frac{\varphi(S)}{F(S)} = C(zI - A)^{-1}B$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - 0.9 & 0.2 & 0 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & -1 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \frac{\varphi(S)}{F(S)} = \frac{z + 0.5}{z^3 - 0.9z^2 + 0.2z} = \frac{z + 0.5}{z(z - 0.4)(z - 0.5)}$$

Entonces: $a_1 = -0.9,\ a_2 = 0.2,\ a_3 = 0,\ b_o = 0,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1$ y $b_3 = 0.5$

b) Para llevar el sistema a la forma canónica controlable la matriz de transformación es $Q = TV$ en donde:

$$T = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.61 \\ 0 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.9 & 1 \\ -0.9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = TV = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.61 \\ 0 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & -0.9 & 1 \\ -0.9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = Q^1B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, el sistema escrito en su forma canónica controlable es:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -0.2 & 0.9\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}f(k) \qquad \varphi(k)=[0.5 \quad 1 \quad 0]x(k)$$

Para llevar el sistema a su forma canónica observable, la matriz de transformación está dada por: $Q = (VT^*)^{-1}$.

$$T=[C^* \quad A^*C^* \quad (A^*)^2C^*] \qquad V=\begin{bmatrix}a_2 & a_1 & 1\\ a_1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1.4\\ 1 & 0.5 & -0.2\\ 0.5 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad V=\begin{bmatrix}0.2 & -0.9 & 1\\ -0.9 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$VT^*=\begin{bmatrix}0.2 & -0.9 & 1\\ -0.9 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0.5\\ 1 & 0.5 & 0\\ 1.4 & -0.2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & -0.45 & 0.10\\ 1 & -0.40 & -0.45\\ 0 & 1 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$Q=(VT^*)^{-1}=\begin{bmatrix}0.5556 & 0.7222 & 0.5389\\ -1.1111 & 0.5556 & 0.7222\\ 2.2222 & -1.1111 & 0.5556\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}=Q^{-1}AQ$$

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}0.5 & -0.45 & 0.10\\ 1 & -0.40 & -0.45\\ 0 & 1 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.9 & -0.2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5556 & 0.7222 & 0.5389\\ -1.1111 & 0.5556 & 0.7222\\ 2.2222 & -1.1111 & 0.5556\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -0.2\\ 0 & 1 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$\hat{B}=Q^{-1}B=\begin{bmatrix}0.5 & -0.45 & 0.10\\ 1 & -0.40 & -0.45\\ 0 & 1 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\hat{C}=CQ=[0 \quad 1 \quad 0.5]\begin{bmatrix}0.5556 & 0.7222 & 0.5389\\ -1.1111 & 0.5556 & 0.7222\\ 2.2222 & -1.1111 & 0.5556\end{bmatrix}=[0 \quad 0 \quad 1]$$

Así, el sistema escrito en su forma canónica observable es:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -0.2\\ 0 & 1 & 0.9\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.5\\1\\0\end{bmatrix}f(k) \qquad \varphi(k)=[0 \quad 0 \quad 1]x(k)$$

Finalmente, la matriz de transformación para llevar el sistema a su forma canónica diagonal es $V = [V_1 \quad V_2 \quad V_3]$ en donde V_1, V_2 y V_3 son los vectores propios de la matriz A que cumplen la condición:

$$(A - \lambda I)V_i = 0$$

En donde λ_i son los valores propios de la matriz A, es decir las raíces de la ecuación característica.

Para el caso que se estudia $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.4$ y $\lambda_3 = 0.5$.

Así el vector propio asociado con $\lambda_1 = 0$ es:

$$[A - 0 * I]V_1 = 0 \qquad AV_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 0.9v_1 - 0.2v_2 &= 0 \\ v_1 &= 0 \\ v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo se obtiene $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, v_3 puede tomar cualquier valor por ejemplo, si $v_3 = 1$, entonces:

$$V_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

El vector propio asociado con $\lambda_2 = 0.4$ es:

$$[A - 0.4I]V_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 & 0 \\ 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 1 & -0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 0.5v_1 - 0.2v_2 &= 0 \\ v_1 - 0.4v_2 &= 0 \\ v_2 - 0.4v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para v_1, v_2 y v_3 se obtiene $v_1 = 0.16 * v3$, $v2 = 0.4 * v3$, haciendo $v_3 = 1$ resulta:

$$V_2 = [0.16 \quad 0.4 \quad 1]^T$$

El vector propio asociado con $\lambda_3 = 0.5$ es:

$$[A - 0.5I]V_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 & 0 \\ 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 0.5v_1 - 0.2v_2 &= 0 \\ v_1 - 0.5v_2 &= 0 \\ v_2 - 0.5v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo se obtiene: $v_1 = 0.25 * v_3$, $v_2 = 0.5 * v3$, haciendo $v_3 = 1$ se obtiene:

$$V_3 = [0.25 \quad 0.5 \quad 1]^T$$

Por lo tanto:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0.16 & 0.25 \\ 0 & 0.4 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4.5 & 1 \\ -25 & 12.5 & 0 \\ 20 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 5 & -4.5 & 1 \\ -25 & 12.5 & 0 \\ 20 & -8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0.16 & 0.25 \\ 0 & 0.4 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & -4.5 & 1 \\ -25 & 12.5 & 0 \\ 20 & -8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -25 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CV = [0 \quad 1 \quad 0.5]\begin{bmatrix} 0 & 0.16 & 0.25 \\ 0 & 0.4 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0.5 \quad 0.9 \quad 1]$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 8.73, 8.74 y 8.75 resulta:

$\beta_1 C_1 = 5 * 0.5 = 2.5$ con $\beta_1 = 1$ $C_1 = 2.5$

$\beta_2 C_2 = -25 * 0.9 = -22.5$ con $\beta_1 = 1$ $C_2 = -22.5$

$\beta_3 C_3 = 20 * 1$ con $\beta_1 = 1$ $C_3 = 20$

Así, el sistema escrito en su forma canónica diagonal es:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}f(k) \qquad \varphi(k) = [2.5 \quad -22.5 \quad 20]x(k)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

8.1 Obtenga cuatro diferentes representaciones en el espacio de estado para cada uno de los siguientes sistemas discretos. Construya el diagrama de flujo para cada representación. Considere condiciones iniciales iguales a cero.

$a)$ $y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = u(k) + 2u(k-1)$

$b)$ $y(k+3) - 0.7y(k+2) - 0.4y(k+1) + 0.1y(k) = 2u(k+1) + u(k)$

$c)$ $G(z) = \dfrac{Y(z)}{M(z)} = \dfrac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 0.3z^{-1} - 0.4z^{-2}}$

$d)$ $F(z) = \dfrac{Y(z)}{M(z)} = \dfrac{0.5}{z(z-0.4)(z-0.8)}$

$e)$ $G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{0.8z + 0.6}{z^2(z+0.4)(z-0.8)}$

$f)$ $\dfrac{M(z)}{E(z)} = \dfrac{0.8z^{-1} + 0.2z^{-2}}{1 - 1.9z^{-1} - 0.24z^{-2}}$

$g)$ $\dfrac{\theta(z)}{E(z)} = \dfrac{0.4(z^2 + 0.5z + 0.8)}{(z-0.5)^2(z+0.8)(1-0.4)}$

$h)$ $\dfrac{T(z)}{F(z)} = \dfrac{0.5z + 0.2}{z^2 - 0.8z + 0.41}$

$i)$ $G(z) = \dfrac{M(z)}{E(z)} = \dfrac{0.2z + 0.1}{z^3 - 2.2z^2 + 1.572z - 0.36}$

8.2 Cierto sistema se modela mediante el sistema de ecuaciones en diferencias:

$y_1(k-2)+2y_1(k-1)+2y_1(k)-0.5y_2(k-2)+y_2(k-1)+y_2(k)=-u_1(k-1)+0.5u_1(k-2)+u_2(k-1)$

$0.1y_1(k-2)-3y_1(k-1)+y_1(k)+y_2(k)=-5u_1(k-1)+2u_1(k-2)-u_2(k-1)-0.1u_2(k-2)$

Exprese el sistema en forma de ecuaciones de estado.

8.3 Obtenga la función de transferencia de pulso correspondiente a cada uno de los sistemas cuya representación en el espacio de estado discreto se da a continuación:

$a)\ x(k+1)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.8\\ -0.4 & 0.6\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u(k) \qquad y(k)=[1 \quad 1]x(k)$

$b)\ x(k+1)=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0\\ 0 & 0 & 0.8\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u(k) \qquad y(k)=[2 \quad -1 \quad 0.8]x(k)$

$c)\ x(k+1)=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.1\\ 0 & -0.5\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k) \qquad y(k)=[1 \quad 0]x(k)$

$d)\ x(k+1)=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u(k) \qquad y(k)=[1 \quad 0 \quad 2]x(k)$

$e)\ x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -a_1\\ 1 & 0 & -a_2\\ 0 & 1 & -a_3\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}r(k) \qquad y(k)=[C_1 \quad C_2 \quad C_3]x(k)$

$$En\ donde:\ C_1=b_1,\ C_2=b_1-a_2b_2,\ C_3=b_o-a_1b_2+a_2^2b_2-a_2b_1$$

8.4 La figura 8.6 representa un sistema de tres tanques interconectados. Los tres tanques contienen agua y sus secciones transversales son iguales y de área A. Para cada tanque se tiene:

h_i = Nivel del agua en el tanque

u_i = Flujo de entrada de a

q_i = Flujo de salida de agua

El flujo de salida de cada tanque es proporcional al nivel del agua $q_i = h_i/R_i$.

El flujo de agua entre los tres tanques es proporcional a la diferencia de niveles:

$q_{12} = (h_1 - h_2)/R_{12}$

$q_{32} = (h_3 - h_2)/R_{32}$

Obtenga una representación en el espacio de estado que modele la dinámica del sistema. Asuma que todas las constantes son positivas. b) Obtenga las funciones de transferencia: $H_3(S)\,/U_1(S)$, $H_2(S)\,/U_1(S)$ y $H_1(S)\,/U_1(S)$. Considere que $u_2 = u_3 = 0$.

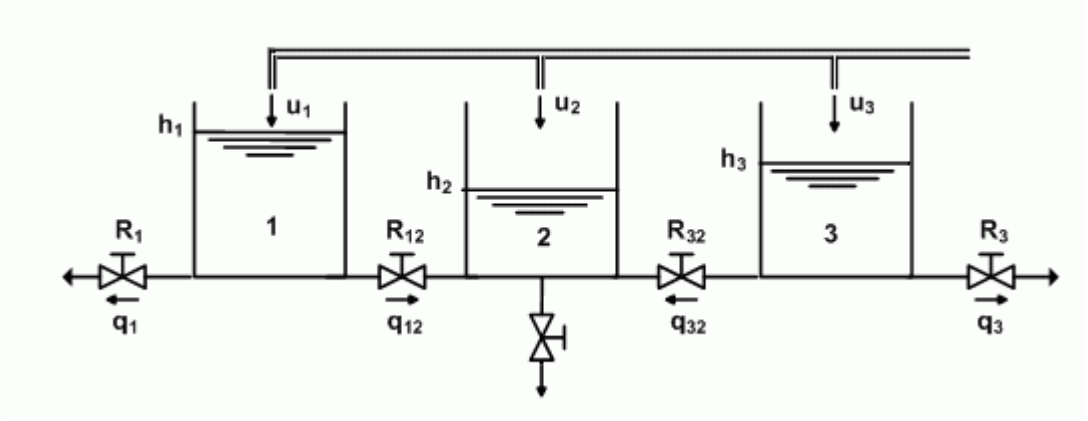


Figura 8.6 Sistema de tres tanques interconectados

8.5 Para cada una de las ecuaciones de estado dadas a continuación obtener: a) La matriz de transición de estado $\phi(k)$ b) La solución de la ecuación de estado.

$a)\ x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [1 \quad 0]x(k)$

$x(0) = [0 \quad 0]^T \qquad u(k) = 1 \qquad \text{Para} \quad k \geq 0$

$b)\ x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [1 \quad -0.6]x(k)$

$x(0) = [1 \quad 0]^T \qquad u(k) = 1 \qquad \text{Para} \quad k \geq 0$

$c)\ x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} r(k) \qquad y(k) = [1 \quad 2]x(k)$

$x(0) = [-1 \quad 0]^T \qquad r(k) = 1 \qquad \text{Para} \quad k \geq 0$

$d)\ x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ -0.3 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [1 \quad -1]x(k)$

$x(0) = [-1 \quad 2]^T \qquad u(k) = 0 \qquad \text{Para todo k}$

$e)\ x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [0 \quad 0 \quad 1]x(k)$

$x(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T \qquad u(k) = 1 \qquad \text{Para} \quad k \geq 0$

8.6 Obtenga tres representaciones en el espacio de estado de tiempo discreto para los sistemas definidos por las ecuaciones en diferencias dadas a continuación:

$a)\ y(k+2)+8y(k+1)+5y(k)=2e(k)$

$b)\ y(k+2)+4y(k+1)+3y(k)=e(k+1)+4e(k)$

$c)\ y(k+2)+8y(k+1)+3y(k)=5e(k+2)+e(k+1)$

$d)\ y(k-2)-4y(k-1)+3y(k)=2u(k-1)+u(k)$

8.7 El sistema descrito por la ecuación de estado:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(k) \qquad y(k)=[-2 \quad 1]x(k)$$

Se transforma en el sistema:

$$\hat{x}(k+1)=\begin{bmatrix}p_1 & 0\\ 0 & p_2\end{bmatrix}\hat{x}(k)+\hat{B}u(k) \qquad y(k)=\hat{C}\hat{x}(k)$$

a) Encuentre los valores de p_1 y p_2 b) Encuentre la matriz Q que produce dicha transformación c) Determine las matrices $\hat{B}$ y $\hat{C}$ d) Determine la función de transferencia utilizando los dos sistemas.

8.8 El sistema descrito por la ecuación de estado:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}-0.8 & 0\\ 0 & 0.6\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(k) \qquad y(k)=[2 \quad -3]x(k$$

Tiene como condición inicial: $x(0)=[-1 \quad 1]^T$ y $u(k)=2$ para todo k. a) Resuelva la ecuación de estado y encuentre $y(k)$ b) Demuestre que la matriz de transición cumple con la propiedad $\phi(0)=I$ c) Demuestre que la solución dada en la parte a cumple con las condiciones iniciales d) Utilice el método recursivo y evalué $y(k)$ para $k=0,1,2,3\ y\ 4$. Compare el resultado con el obtenido en la parte a.

8.9 Para el sistema descrito en el literal e del problema 8.5: a) calcule la función de transferencia $Y(z)/U(z)$. b) Dibuje el diagrama de flujo de señales del sistema. c) Utilice la fórmula de ganancia de Mason y verifique el resultado obtenido en a.

8.10 Para el sistema de control discreto mostrado en la figura 8.7 a) Determinar la función de transferencia de pulso en lazo cerrado $\theta(z)/R(z)$. b) Representar la función de transferencia como una ecuación de estado escrita en forma canónica diagonal. c) Hallar la respuesta del sistema cuando la entrada es $r(t) = 5u(t)$. Utilice para ello la función de transferencia y la representación en el espacio de estado del sistema y compare los resultados. Asuma $T = 1min,\ D(z) = 1$ y que:

$$a)\ G_p(S) = \frac{0.4e^{-2S}}{10S+1} \qquad b)\ G_p(S) = \frac{0.5}{S(S+0.1)}$$

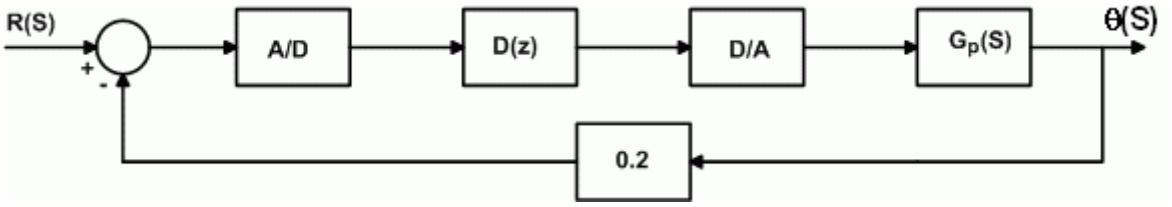


Figura 8.7 Sistema de control para el ejemplo 8.10

8.11 Discretizar cada uno de los sistemas continuos que se dan a continuación.

$$a)\ \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = [2 \quad -1]x(t) \qquad T = 0.1\ s.$$

$$b)\ \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = [0 \quad 1]x(t) \qquad T = 0.1\ s.$$

$$c)\ \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = [1 \quad 0]x(t) \qquad T = 0.2\ s.$$

$$d)\ \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = [0 \quad 0 \quad 0] \qquad T = 0.2\ s$$

8.12 Dados los sistemas:

$$a)\ x(k+1) = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.62 & -0.048 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(t) = [0 \quad 0.4 \quad 0.2]x(k)$$

$$b)\ x(k+1) = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.62 & -0.048 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [0 \quad 0.4 \quad 0.2]x(k)$$

Obtener su representación en el espacio de estado en la forma: a) Canónica Controlable b) Canónica observable. c) Canónica diagonal. d) Obtenga la solución de las ecuaciones si $x(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ y $u(k) = 1$ para $k \geq 0$.

8.13 La figura 8.8 representa la respuesta de un sistema de temperatura en lazo abierto ante una entrada en escalón. a) Obtenga la descripción matemática del sistema aproximándolo a un sistema de primer orden con retardo y a un sistema de segundo orden con retardo. b) Discretice los modelos estimados y obtenga, para cada caso, las ecuaciones de estado del sistema en forma canónica controlable.

Asuma como período de muestreo $T = 1\,min$ y que el sistema de temperatura está precedido por un retenedor de orden cero.

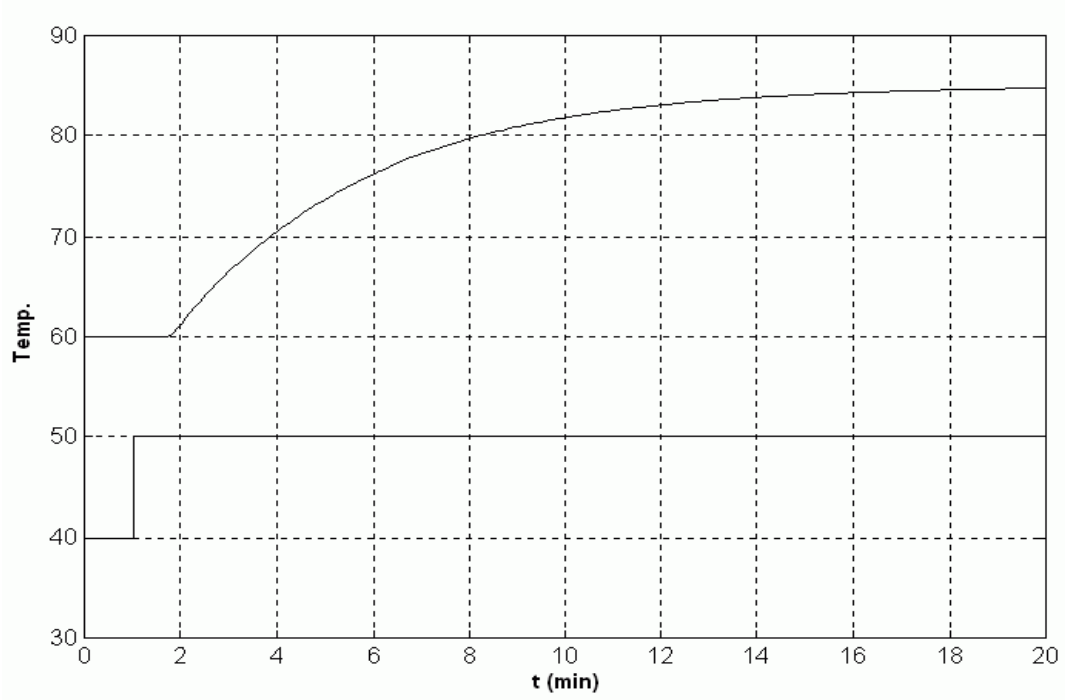


Figura 8.8 Respuesta del sistema a un escalón

8.14 Un sistema con función de transferencia continua dada por:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{1}{S^2 + 2S + 4}$$

Esta precedido por un retenedor de orden cero. Determine, por dos métodos, la ecuación de estado del sistema en tiempo discreto. Asuma que el período muestreo es $T = 0.2\,s$.

8.15 Dado el sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + 2u(k)$$

Hallar $x(4)$ si: $u(0) = 2, u(1) = 0, u(2) = 1, u(3) = 2, y(1) = 3$ y $y(2) = 0$

8.16 Dado el sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [0 \quad 2 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 4u(k)$$

Hallar $x(0)$ si: $u(0) = 1, u(1) = -2, u(2) = 2, y(0) = 1, y(1) = 2, y(2) = -1$

8.17 La ecuación de estado de tiempo continuo de un motor de DC se puede representar mediante la ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & -350 & -250 & 500 \\ 0 & 0 & -40 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\theta(t) = [1200 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

En donde: $x_1(t)$ representa la posición $\theta(t)$ en rad, $x_2(t)$ representa la velocidad $\omega(t)$ del motor en rad/s, $x_3(t)$ representa la corriente de la armadura $i_a(t)$ en Amperios y $v(t)$ el voltaje aplicado al motor. a) Discretice el modelo del motor asumiendo que el periodo de muestreo es de 0.005 seg. b) Obtenga el diagrama de flujo de señales correspondiente al modelo discreto del motor. c) Resuelva la ecuación de estado discreta obtenida y calcule los valores de la posición, la velocidad y la corriente del motor en estado estable cuando $v(t)$ es un escalón

unitario. d) Obtenga la función de transferencia de pulso $\theta(z)/V(z)$ y utilice el teorema del valor final para calcular la posición $\theta(t)$ de estado estable.

8.18 Obtenga una representación en el espacio de estado para cada uno de los sistemas de control con dos entradas y dos salidas dados en las figuras 8.9a y 8.9b

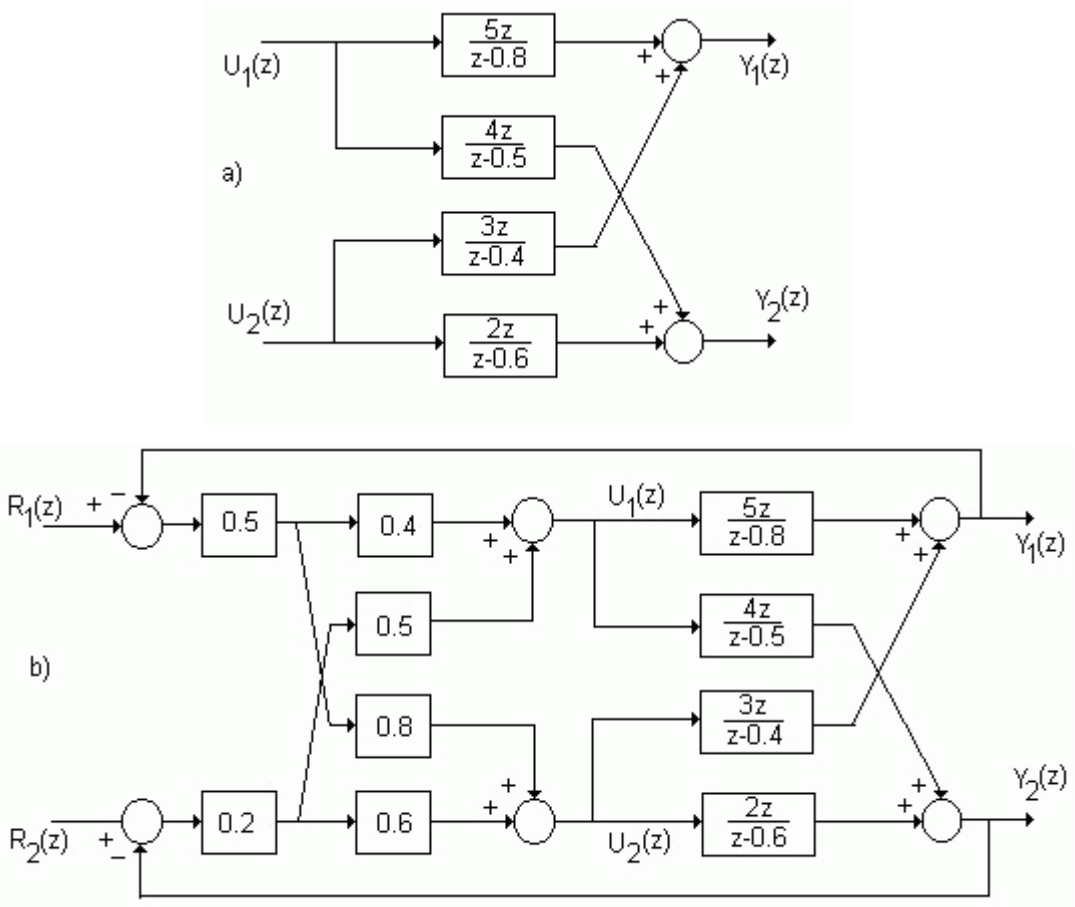


Figura 8.9 Sistemas para el problema 8.18

8.19 Para cada uno de los sistemas mecánicos traslacionales que se muestran en la figura 8.10 obtenga las ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento dinámico y, a partir de ellas, obtenga su representación en el espacio de estado. Asuma que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son las salidas y $f(t)$ la entrada.

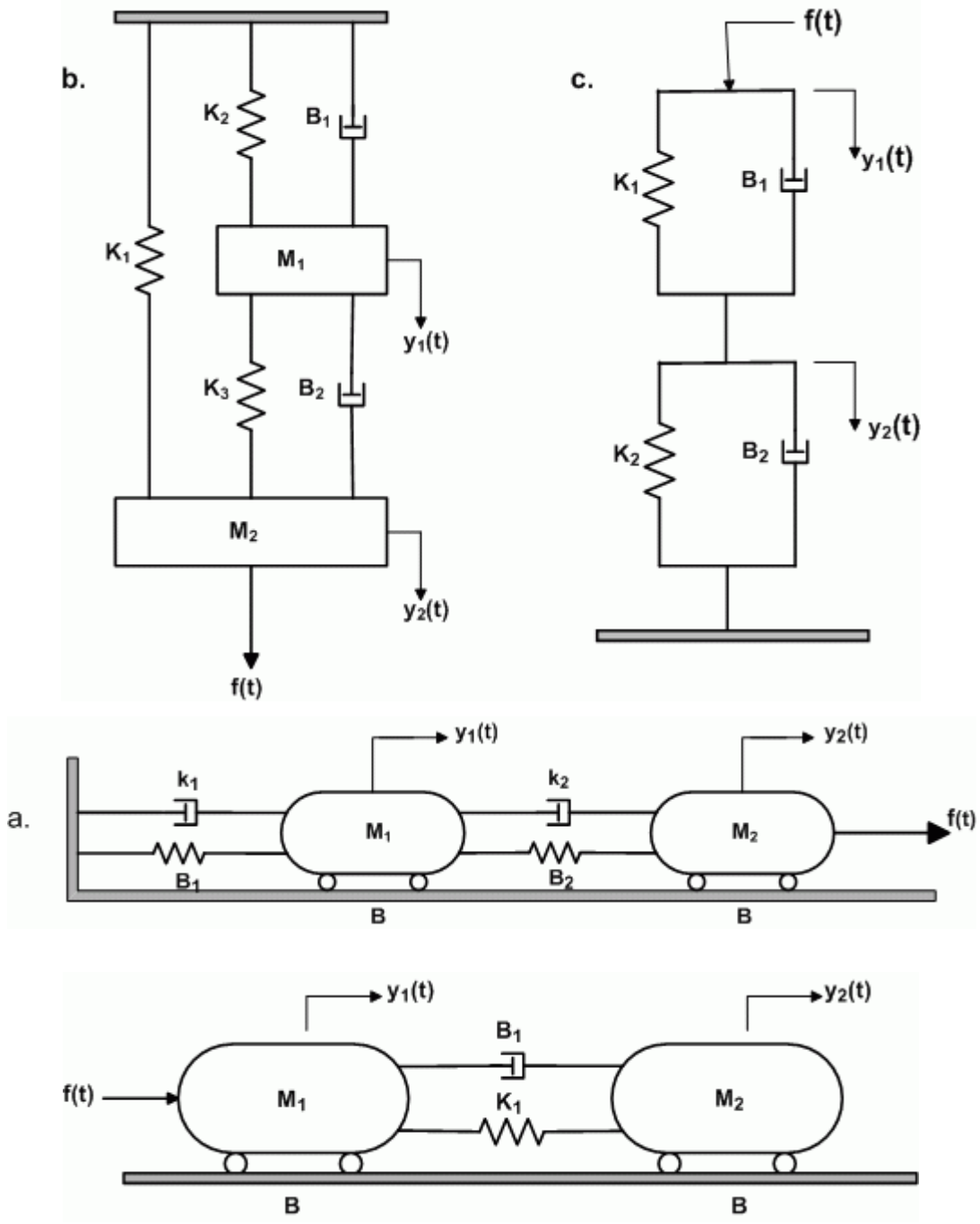


Figura 8.10 sistemas mecánicos para el problema 8.19

8.20 Para cada uno de los sistemas mecánicos rotacionales que se muestran en la figura 8.11 obtenga las ecuaciones diferenciales que describen su

comportamiento dinámico y, a partir de ellas, obtenga su representación en el espacio de estado. Asuma que el torque τ es la entrada al sistema y que θ_1 es su salida, n_1 y n_2 representan el número de dientes y su cociente determina la relación de engranajes.

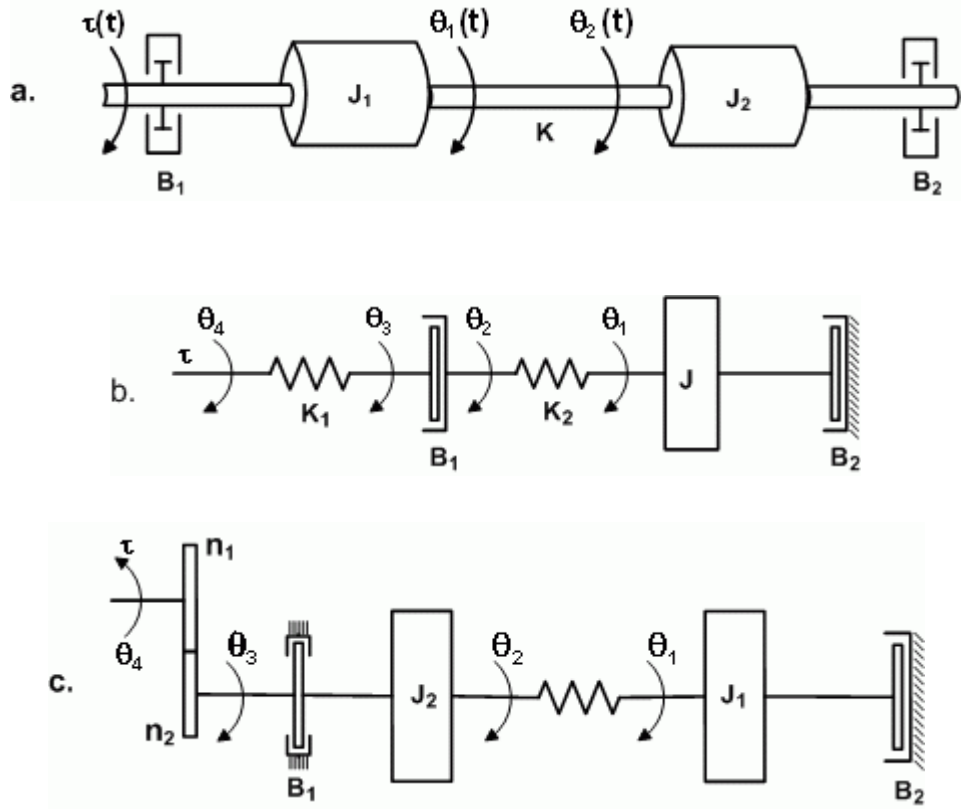


Figura 8.11 Sistemas mecánicos rotacionales para el problema 8.20

8.21 Para cada uno de los circuitos que se dan en la figura 8.12, obtenga: a) La función de transferencia $V_o(S)/V_i(S)$ b) Seleccione el periodo de muestreo adecuado y discretice la función de transferencia obtenida c) Obtenga la representación del sistema discreto en la forma canónica diagonal. d) Resuelva la ecuación de estado en tiempo discreto y obtenga $v_o(k)$ para $K = 0,1,2,3,4$. Asuma $v_i(t) = u(t)$. e) Utilizando la función de transferencia obtenida en a) calcule $v_o(t)$ y compare el resultado con el obtenido en el literal anterior.

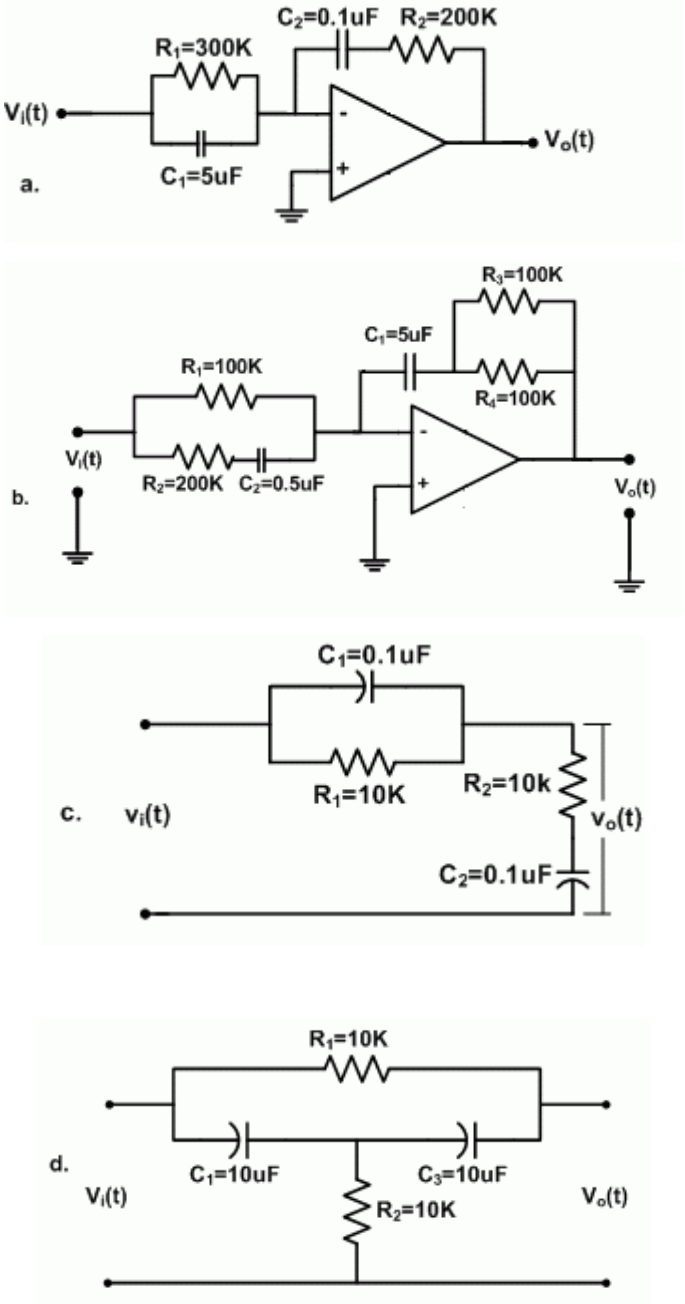


Figura 8.12 Circuitos para el problema 8.21

8.22 Para el sistema de la figura 8.13 determinar la ecuación diferencial del sistema y su representación en el espacio de estado. La entrada es $f(t)$ y la salida el movimiento de la masa $x(t)$.

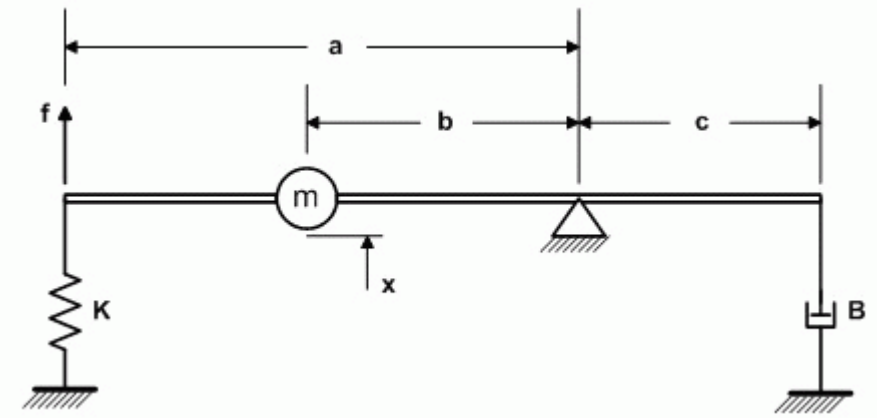


Figura 8.13 Sistema mecánico para problema 8.21

8.23 Para el sistema de control dado en la figura 8.14 obtenga un modelo en el espacio de estado tomando como variables de estado la salida del proceso $x_1(t)$, la salida del controlador $x_2(t)$ y la salida del sensor $x_3(t)$.

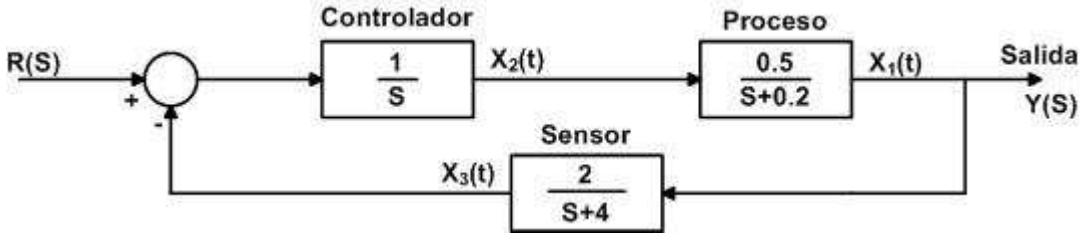
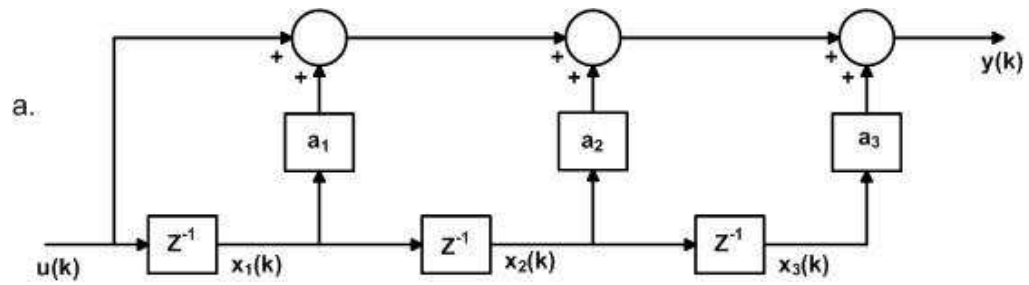


Figura 8.14 Sistema de control para el problema 8.23

8.24 Para cada uno de los sistemas mostrados en la figura 8.15 obtenga la ecuación de estado y la ecuación de salida.



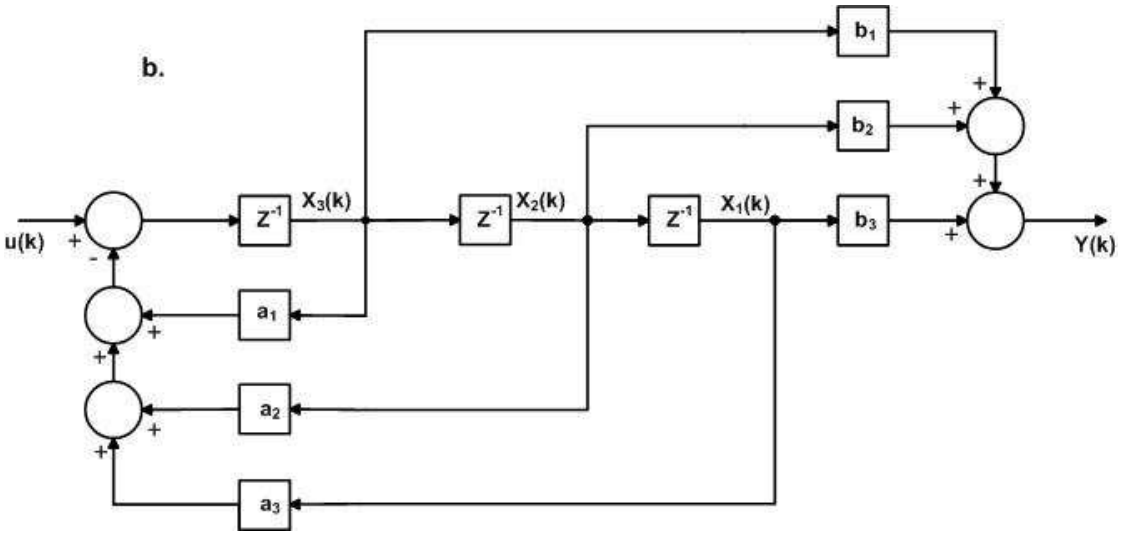


Figura 8.15. Diagramas para el problema 8.24

REFERENCIAS

[8.1] Ogata, Katsuhiko. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall. Mexico 1996.

[8.2] Santina, Mohamed. Stubberud et al. *Digital control systems design*. Saunders College Publishing Orlando 1994.

[8.3] Phillips, Charles. Nagle Troy. *Digital control systems. Analysis and design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs 1995.

[8.4] Phillips, Charles, Nagle Troy. *Digital control systems*. Analysis and design. Prentice Hall. Englewood cliffs 1995.

[8.5] Kuo, Benjamin. *Sistemas de control automático*. Prentice Hall México 1996.

[8.6] Ogata, Katsuhiko. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall. México 1996.

[8.7] Ogata, Katsuhiko. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall. México 1996.

CAPITULO NUEVE

DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO

El problema de diseño de un sistema de control digital consiste en determinar un algoritmo que permita generar una secuencia de valores de las variables de control de la planta $u(k)$, de manera que las salidas $y(k)$ cumplan con las especificaciones de funcionamiento establecidas en cuanto a estabilidad, exactitud, velocidad de respuesta, un índice determinado de desempeño, etc.

En esta sección se presenta el diseño de controladores en el espacio de estado, utilizando el método de asignación de polos. Para su aplicación el método requiere que el sistema sea completamente controlable y completamente observable.

La controlabilidad y la observabilidad son propiedades de la descripción interna del sistema.

9.1 CONTROLABILIDAD

9.1.1 Controlabilidad Completa del Estado: Sea el sistema discreto definido por la ecuación:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad 9.1$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad 9.2$$

De las ecuaciones 9.1 y 9.2 se deduce que para poder controlar la salida $y(k)$, es necesario controlar las variables de estado $x(k)$ del sistema. La controlabilidad se refiere a la posibilidad de transferir un sistema desde un estado inicial arbitrario $x(0)$, a cualquier estado deseado $x(n)$ en un intervalo de tiempo finito (en el instante $k = n$).

Se dice que un sistema de control es de "estado completamente controlable", si es posible transferir el sistema desde un estado inicial arbitrario a cualquier otro estado deseado en un intervalo de tiempo finito, es decir, si existe una señal de control, no restringida, $u(kT)$ definida a lo largo de un número finito de periodos de muestreo de manera que, partiendo de cualquier estado inicial, el estado $x(kT)$ pueda ser transferido al estado deseado x_f en n periodos de muestreo como máximo. [9.1].

Según la definición anterior, la controlabilidad completa del estado depende sólo de la variación del estado con las entradas es decir, de las matrices A y B de la ecuación 9.1.

Como se sabe, a partir de un estado inicial $x(0)$, es posible determinar el estado $x(n)$, que alcanza el sistema cuando se aplica la entrada $u(k), k = 1, 2, \ldots n$. La solución de la ecuación 9.1 es:

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{(n-1-j)} Bu(j) \quad 9.3$$

De la ecuación 9.3 se obtiene:

$X(1) = Ax(0) + Bu(0)$

$x(2) = A^2x(0) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$

... ...

$$x(n) = A^n x(0) + A^{n-1}Bu(0) + A^{n-2}Bu(1) \cdots + ABu(n-2) + Bu(n-1) \quad 9.3$$

La expresión anterior se puede escribir en la forma:

$$x(n) = A^n x(0) + [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \quad 9.4$$

Si $x(n)$ y $x(0)$ son conocidos, la ecuación 9.4 se puede reescribir así:

$$x(n) - A^n x(0) = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \quad 9.5$$

Como el orden del vector de estado $x(k)$ es n, entonces la ecuación 9.5 debe generar n ecuaciones simultáneas, lo cual sólo es posible si el rango de la matriz $[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$ es n.

Resumiendo, el sistema descrito por la ecuación 9.1 es controlable si:

$$Rango[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n \quad 9.6$$

Siendo $n \times n$ el orden de la matriz A.

- Una condición suficiente y necesaria para la controlabilidad completa del estado, es que no se presente cancelación de ceros y polos en la función de transferencia de pulso.

9.1.2 Controlabilidad Completa de la salida: En la práctica, en un sistema de control se controla la salida del sistema en lugar de controlar el estado. Por tal motivo, es necesario analizar la controlabilidad completa de la salida. [9.2].

Sea el sistema definido por las ecuaciones:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad 9.7$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad 9.8$$

Se dice que el sistema definido por las ecuaciones 9.7 y 9.8 es de salida completamente controlable, si mediante una señal de control no restringida $u(k)$, es posible transferir la salida del sistema desde un valor inicial $y(0)$ hasta un valor deseado y_f en n períodos de muestreo como máximo.

La condición de controlabilidad competa de la salida se puede obtener teniendo en cuenta las ecuaciones 9.4 y 9.8 es decir:

$$x(n) = A^n x(0) + [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(n) - CA^n x(0) + [CB \quad CAB \quad A^2B \quad \cdots \quad CA^{n-1}B]\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \qquad 9.9$$

Teniendo en cuenta que $y(n)$ es el vector de salida y su orden es m, se deduce que la ecuación 9.9 debe generar m ecuaciones simultáneas, lo cual sólo es posible si el rango de la matriz $[CB \quad CAB \quad A^2B \quad \cdots \quad CA^{n-1}B]$ es m.

Resumiendo, el sistema descrito por las ecuaciones 9.7 y 9.8 es de salida completamente controlable sí:

$$Rango[CB \quad CAB \quad A^2B \quad \cdots \quad CA^{n-1}B] = m \qquad 9.10$$

Así mismo, se puede demostrar que si la ecuación 9.8 es de la forma:

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad 9.11$$

El sistema es de salida completamente controlable si:

$$Rango[D \quad CB \quad CAB \quad A^2B \quad \cdots \quad CA^{n-1}B] = m \qquad 9.12$$

9.2 OBSERVABILIDAD

En muchas ocasiones no es posible medir directamente el estado de un sistema ya sea por que no existen los sensores necesarios o por que algunas de las variables de estado no tienen correspondencia con magnitudes físicas. En este caso, no sería posible establecer una estrategia de control basada en los valores alcanzados por las variables de estado. El concepto de observabilidad, se relaciona con la posibilidad de obtener el estado de un sistema a partir de la medición o el conocimiento de las entradas y de las salidas del mismo.

Sea el sistema discreto definido por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{9.13}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \tag{9.14}$$

Se dice que el sistema descrito por las ecuaciones 9.13 y 9.14 es complemente observable si cualquier estado inicial $x(0)$ puede determinarse a partir de la observación de $y(k)$ en n períodos de muestreo como máximo.

La condición de observabilidad se puede obtener a partir de las ecuaciones 9.13 y 9.14, asumiendo $u(k) = 0$, es decir, considerando que:

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{9.15}$$

$$y(k) = Cx(k) \tag{9.16}$$

Al hacer variar k desde cero hasta n resulta:

$$y(0) = Cx(0)$$

$$y(1) = Cx(1) = CAx(0)$$

$$y(2) = Cx(2) = CAx(1) = CA^2x(0)$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$y(n-1) = Cx(n-1) = CA^{n-1}x(0)$$

Las ecuaciones anteriores escritas en forma matricial toman la forma:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) \tag{9.17}$$

El vector de salida $y(k)$ tiene n elementos por lo tanto, en la ecuación 9.17 se deben generar n ecuaciones simultáneas, esta condición solo es posible si:

$$Rango \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{9.18}$$

Teniendo en cuenta que el rango de una matriz y la de su transpuesta conjugada es el mismo, la condición suficiente y necesaria para que un sistema sea completamente observable es:

$$Rango[C^* \quad A^*C^* \quad (A^*)^2C^* \quad \cdots \quad (A^*)^{n-1}C^*] = n \qquad 9.19$$

En donde $n \times n$ es el orden de la matriz A.

- Una condición suficiente y necesaria para la observabilidad completa del estado es que no se presente cancelación de ceros y polos en la función de transferencia de pulso.

EJEMPLO 9.1

Dado el sistema en tiempo discreto definido por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.4 & -0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [1 \quad 0 \quad 0]x(k)$$

a) Es el sistema completamente controlable? b) Es el sistema completamente observable?

SOLUCION: a) La matriz de controlabilidad para el sistema dado es:

$$C_o = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.4 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.4 & -0.8 \\ 0.4 & -0.18 & 0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.4 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Se intercambian la fila dos y la tres para obtener una matriz triangular inferior.

$$Rango[C_o] = 3$$

El sistema es controlable.

b) La matriz de observabilidad para el sistema dado es:

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$CA = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.4 & -0.8 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$CA^2 = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.4 & -0.8 \\ 0.4 & -0.18 & 0.24 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$O_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Rango\,[O_b] = 3$$

El sistema es observable.

A continuación se presenta un programa en Matlab que permite establecer la controlabilidad y la observabilidad de un sistema.

```
clc
a = input (`entre la matriz a = ´)
b = input (`entre la matriz b = ´)
c = input (`entre la matriz c = ´)
d = input (`entre la matriz d = ´)
0b = [b  a*b  (a*a)*b];
Co = [c; c * a;  c * (a * a)];
rank (Co)
rank (0b)
```

9.3 CONTROL POR REALIMENTACIÓN DEL ESTADO Y ASIGNACIÓN DE POLOS

El método de asignación de polos para el diseño de controladores en el espacio de estado requiere que el sistema sea de estado completamente controlable y completamente observable.

El método de asignación de polos, comienza con la determinación de los polos de lazo cerrado deseados, utilizando para ello especificaciones basadas en la respuesta transitoria y/o en los requerimientos de respuesta en frecuencia.

Si se desea ubicar los polos de lazo cerrado en $z = z_1,\ z = z_2, \ldots z = z_n$ es posible elegir una matriz de ganancia de realimentación K adecuada, que force al sistema a tener los polos de lazo cerrado en el lugar deseado siempre y cuando el sistema sea de estado completamente controlable y completamente observable.

A continuación se presenta el método de diseño de controladores en el espacio de estado conocido con el nombre de **"técnica de asignación de polos"**. Se supone que todas las variables de estado son medibles y están disponibles para la realimentación, además se insiste, el sistema debe ser completamente controlable y completamente observable.

Sea el sistema de control en lazo abierto dado en la figura 9.1a y definido por la ecuación de estado:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{9.20}$$

Si se elige como ley de control:

$$u(k) = -Kx(k) \tag{9.21}$$

Se obtiene el sistema de control realimentado mostrado en la figura 9.1b. A este esquema se le denomina **"sistema con realimentación de estado".**

La matriz $K = [k_1 \ k_2 \cdots k_n]$ se llama **"matriz de ganancia de realimentación"** y convierte al sistema en un sistema de control en lazo cerrado, cuya dinámica queda determinada por las especificaciones de funcionamiento dadas las cuales determinan, a la vez la ubicación de los polos de lazo cerrado deseados.

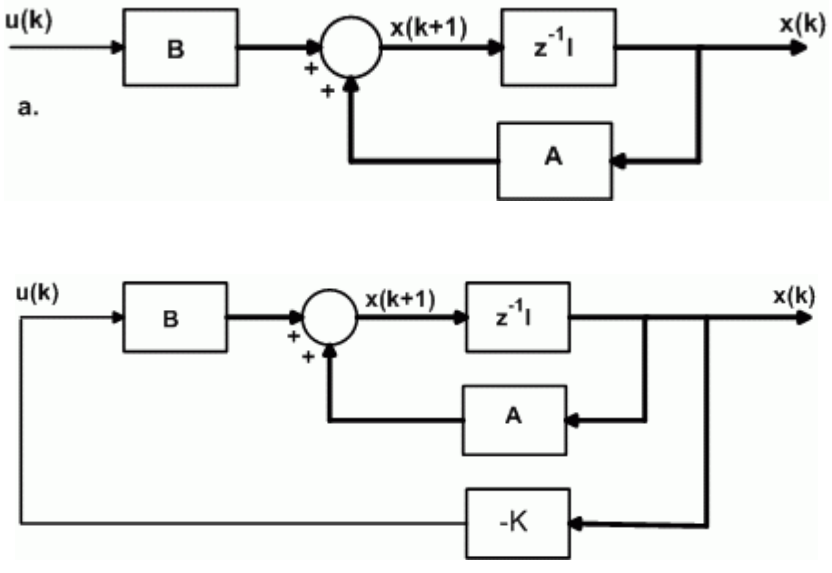


Figura 9.1 a) Sistema de control en lazo abierto. b) Sistema de control en lazo cerrado $u(k) = -Kx(k)$.

Reemplazando la ecuación 9.21 en la ecuación 9.20, se obtiene la ecuación de estado del sistema en lazo cerrado, así:

$$x(k+1) = Ax(k) - BKx(k)$$

$$x(k+1) = [A - BK]x(k) \qquad 9.22$$

La estabilidad y las características de respuesta transitoria del sistema se determinan a partir de los valores propios de la matriz $[A - BK]$.

Tomando la transformada z a la ecuación 9.22 se obtiene:

$$zX(z) - zx(0) = [A - BK]X(z)$$

$$[zI - A + BK] = zx(0) \qquad 9.23$$

Premultiplicando por $[zI - A + BK]^{-1}$ resulta:

$$X(z) = [zI - A + BK]^{-1}zx(0)$$

$$X(z) = \frac{z.(adj[zI - A + BK]).x(0)}{|zI - A + BK|} \qquad 9.24$$

De la ecuación 9.24 se deduce que la ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$|zI - A + BK| = 0 \qquad 9.25$$

$$|zI - A + BK| = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} \cdots + \alpha_{n-1}z + \alpha_n = 0 \qquad 9.26$$

En donde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ son los coeficientes de la ecuación característica deseada.

9.4 CALCULO DE LA MATRIZ DE GANANCIA DE REALIMENTACIÓN.

La matriz de ganancia de realimentación K se puede obtener por diferentes métodos. A continuación se presentan dos de ellos, caracterizados por su fácil aplicación y generalidad.

9.4.1 Método de Sustitución Directa. En este caso, el procedimiento para hallar la matriz de ganancia de realimentación es el siguiente:

a) Obtener la ecuación característica planta-ley de control:

$$|zI - A + BK| = 0 \qquad 9.27$$

b) Conformar la ecuación característica con los polos de lazo cerrado deseados $z_1, z_2 \cdots z_n$:

$$(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)=z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\alpha_2 z^{n-2}\cdots+\alpha_{n-1}z+\alpha_n=0 \quad 9.28$$

c) Igualar los coeficientes de potencias iguales en z en los polinomios obtenidos con las ecuaciones 9.27 y 9.28 y determinar las n ecuaciones simultáneas que, al resolverlas, permiten determinar los componentes $k_1, k_2 \cdots k_n$ de la matriz K.

9.4.2 Formula de Ackerman: Esta fórmula permite calcular directamente la matriz de ganancia de realimentación, a partir de la ecuación:

$$K=[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1][B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]^{-1}\phi(A) \quad 9.29$$

En donde:

$$\phi(A)=z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\alpha_2 z^{n-2}\cdots+\alpha_{n-1}z+\alpha_n \quad 9.30$$

Siendo $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ los coeficientes de la ecuación característica deseada:

$$(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)=z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\alpha_2 z^{n-2}\cdots+\alpha_{n-1}z+\alpha_n=0 \quad 9.31$$

A continuación se deduce la formula de Ackerman para el caso particular de $n=3$. La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$|zI-A+BK|=z^3+\alpha_1 z^2+\alpha_2 z+\alpha_3=0 \quad 9.32$$

Si se hace: $\hat{A}=A-BK$ se obtiene:

$$\left|zI-\hat{A}\right|=z^3+\alpha_1 z^2+\alpha_2 z+\alpha_3=0 \quad 9.33$$

Según el teorema de Cayley-Hamilton, toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica, es decir:

$$\phi(\hat{A})=\hat{A}^3+\alpha_1\hat{A}^2+\alpha_2\hat{A}+\alpha_3 \quad 9.34$$

Además:

$$\alpha_3 I=\alpha_3 I$$

$$\alpha_2\hat{A}=\alpha_2(A-BK)$$

$$\alpha_1\hat{A}^2=\alpha_1(A-BK)^2=\alpha_1\left(A^2-ABK-BK\hat{A}\right) \quad 9.35$$

$$\hat{A}^3=(A-BK)^3=A^3-A^2BK-ABK\hat{A}-BK\hat{A}^2$$

Por lo tanto:

$$\hat{A}^3+\alpha_1\hat{A}^2+\alpha_2\hat{A}+\alpha_3$$
$$=A^3-A^2BK-ABK\hat{A}-BK\hat{A}^2+\alpha_1\left(A^2-ABK-BK\hat{A}\right)+\alpha_2(A-BK)+\alpha_3 I$$

Es decir:

$$\phi(\hat{A})=\phi(A)-A^2BK-ABK\hat{A}-BK\hat{A}^2-\alpha_1 ABK-\alpha_1 BK\hat{A}-\alpha_2 BK$$

Como $\phi(\hat{A}) = 0$, según la ecuación 9.34 resulta:

$$\phi(A) = A^2BK + ABK\hat{A} + BK\hat{A}^2 + \alpha_1 ABK + \alpha_1 BK\hat{A} + \alpha_2 BK$$

$$\phi(A) = B\left[\alpha_2 K + \alpha_1 K\hat{A} + K\hat{A}^2\right] + AB\left[\alpha_1 K + K\hat{A}\right] + A^2BK$$

La ecuación anterior, escrita en la forma matricial toma la forma:

$$\phi(A) = [B \quad AB \quad A^2B]\begin{bmatrix}\alpha_2 K + \alpha_1 K\hat{A} + K\hat{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\hat{A} \\ K\end{bmatrix}$$

Como el sistema es de estado complemento observable, la matriz $[B \quad AB \quad A^2B]$ tiene inversa, entonces:

$$\begin{bmatrix}\alpha_2 K + \alpha_1 K\hat{A} + K\hat{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\hat{A} \\ K\end{bmatrix} = [B \quad AB \quad A^2B]^{-1}\phi(A)$$

Premultiplicando a lado y lado por $[0 \quad 0 \quad 1]$ se obtiene:

$$K = [0 \quad 0 \quad 1][B \quad AB \quad A^2B]^{-1}\phi(A) \qquad 9.36$$

La ecuación 9.36 corresponde a la formula de Ackerman cuando $n = 3$ y se puede generalizar para obtener la ecuación 9.29.

EJEMPLO 9.2

La dinámica del sistema de flujo que se muestra en la figura 9.2 está dada por:

$$G_f(S) = \frac{2.372e^{-0.45S}}{1.64S + 1}$$

Obtener para este proceso, la matriz de ganancia de realimentación de modo que el sistema en lazo cerrado, tenga un tiempo de establecimiento de 1.2 seg y coeficiente de amortiguamiento igual a 0.8. Asuma que el período de muestreo es $T = 0.3\,s$. (El modelo matemático del sistema se estimó aplicando una señal en escalón unitario en la válvula de control de flujo FCV).

SOLUCION: La función de transferencia de pulso del sistema, con $T = 0.3\,s$ está dada por:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left[\frac{G(S)}{S}\right] \qquad G(S) = \frac{2.372}{1.64S + 1}$$

$$HG(z) = \frac{0.2073z + 0.1892}{z^3 - 0.8328z} = \frac{0.2073(z + 0.9126)}{z^2(z - 0.8328)}$$

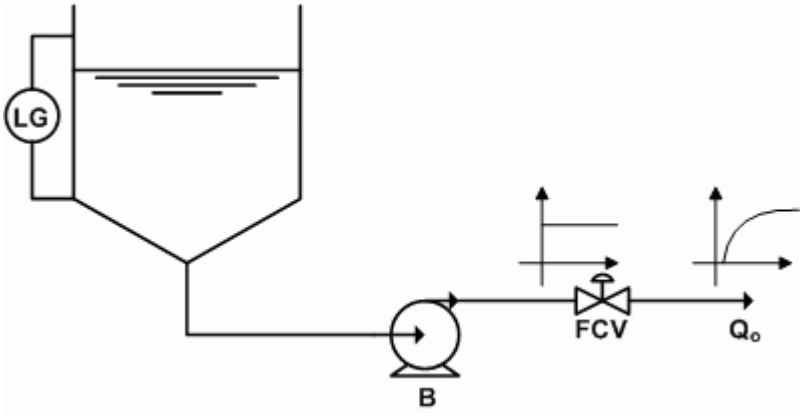


Figura 9.2 Sistema de flujo para el ejemplo 9.2

La representación en el espacio de estado en tiempo discreto es:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8323 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 0.2073 \quad 0.1892]x(k)$$

La ubicación de los polos de lazo cerrado deseados se obtiene a partir de las especificaciones de tiempo de establecimiento y coeficiente de amortiguamiento requerido así:

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} \qquad w_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0.8 * 1.2} \qquad w_n = 4.16\, rad/s$$

Entonces:

$|z| = e^{-\xi w_n T} = 0.368$

$\theta = 57.3 w_n T\sqrt{1-\xi^2} = 43^o$

$z = 0.368(\cos 43^o \pm j \sin 43^o) = 0.269 \pm j \sin 0.251$

Por lo tanto, los polos de lazo cerrado diseñados deben estar ubicados en $z = 0.269 + j0.251$ y $z = 0.269 - j0.251$. El tercer polo se asigna en z = 0.05 de modo que no sea polo dominante; así la ecuación característica está dada por:

$$(z - 0.269 - j0.251)(z - 0.269 + j0.251)(z - 0.05) = 0$$

$$z^3 - 0.588z^2 + 0.1623z - 0.0068 = 0$$

a) Método de sustitución Directa

- Calculo de la ecuación característica del sistema planta-ley de control:

$$|zI - A + BK| = 0$$

$$[zI - A + BK] = \begin{bmatrix} z - 0.8328 + k_1 & k_2 & k_3 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & -1 & z \end{bmatrix}$$

$$|zI - A + BK| = z^3 + (k_1 - 0.8328)z^2 + k_2 z + k_3 = 0$$

- Ecuación característica deseada:

$$z^3 - 0.588z^2 + 0.1623z - 0.0068 = 0$$

- Comparación de coeficientes de potencias iguales de z en las dos ecuaciones:

$$k_1 - 0.8328 = -0.588$$

$$k_2 = 0.1632$$

$$k_3 = -0.0068$$

Resolviendo se obtiene: $k_1 = 0.2448$, $k_2 = 0.1632$, $k_3 = -0.0068$ es decir:

$$K = [0.2448 \quad 0.1632 \quad -0.0068]$$

b) Utilizando la Fórmula de Ackerman:

$$K = [0 \quad 0 \quad 1][B \quad AB \quad A^2B]^{-1}\phi(A)$$

La ecuación característica deseada dio: $z^3 - 0.588z^2 + 0.1623z - 0.0068 = 0$

Entonces:

$$\phi(A) = A^3 - 0.588A^2 + 0.1623A - 0.0068I = \begin{bmatrix} 0.2975 & 0 & 0 \\ 0.3656 & -0.0068 & 0 \\ 0.2443 & 0.1623 & -0.0068 \end{bmatrix}$$

$$[B \quad AB \quad A^2B]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.8323 & 0 \\ 0 & 1 & -0.8328 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & -0.8323 & 0 \\ 0 & 1 & -0.8328 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.2975 & 0 & 0 \\ 0.3656 & -0.0068 & 0 \\ 0.2443 & 0.1623 & -0.0068 \end{bmatrix}$$

$$K = [0.2443 \quad 0.1623 \quad -0.0068]$$

El siguiente programa en MATLAB permite resolver el problema propuesto en el ejemplo anterior:

```
% Calculo de la matriz de ganancia realimentación  K
np = [2.372];
dp = [1.64   1];
[a, b, c, d] = tf2ss(np,dp)                    %  Representación de estado continuo.
[ad1, bd1, cd1, dd1 ] = c2dt(a,b,c,0.3,0.45)    % Discretización.
[nd1,dd1]=ss2tf(ad1,bd1,cd1,dd1)        % Función de transferencia e
printsys(nd1, dd1, 'z')
[ad,bd,cd,dd]=tf2ss(nd1,dd1)                    % Forma Canónica
p = [0.269 + 0.251 * i   0.269 - 0.251 * i   0.05];          % Polos deseados
k = acker (ad, bd, p)
aw = [ad- bd * k];
bw = bd;
cw = cd;
dw = dd,
[nw1, dw1] = ss2tf (aw, bw, cw, dw);                    % FTP en lazo cerrado
printsys(nw1, dw1, 'z')
k1 = 0:0.1: 5;
r = ones (1, 51);
y = filter (nw1,dw1, r);
figure(1)
plot (k1,y)
axis([0 5 0 1.2])
grid
xlabel ('t [sec] ')
ylabel ('flujo')
title ('RESPUESTA CON LA MATRIZ K')
pause
Ko = ddcgain(nw1, dw1);
```

```
bwo = [bw/Ko];
[nwo, dwo] = ss2tf(aw,bwo,cw,dw);
y1 = filter(nwo,dwo,r);
figure(2)
plot(k1, y1)
xlabel('t [sec]')
ylabel('flujo')
axis([0 5  0 1.2])
grid
```

La figura 9.3 representa la respuesta del sistema en lazo cerrado con la matriz K estimada.

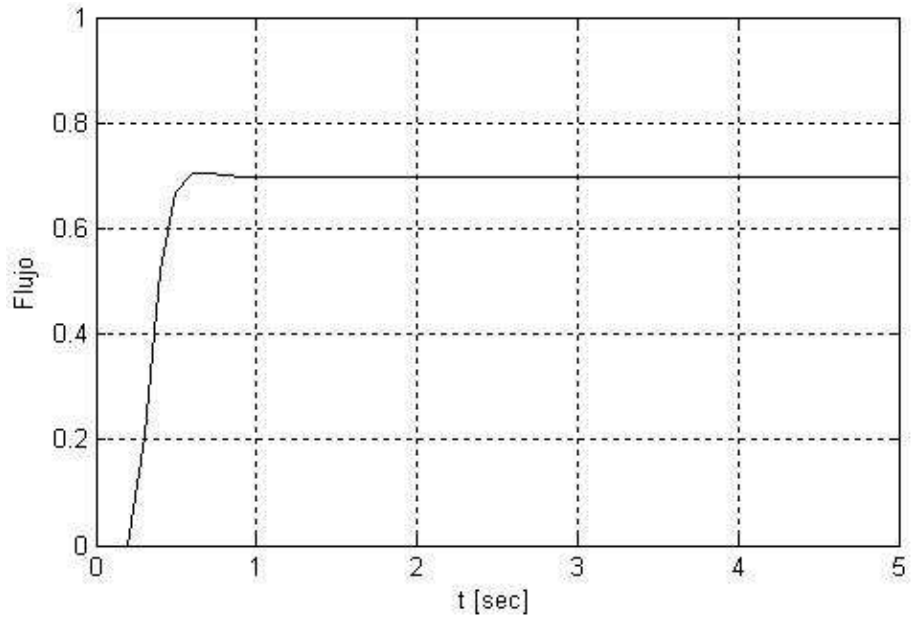


Figura 9.3 Respuesta del sistema del ejemplo 9.2 con K estimada

9.5 SISTEMA DE CONTROL CON ENTRADA DE REFERENCIA

El sistema de control descrito en la sección anterior no tiene entrada de referencia. Este tipo de control se denomina **"sistema de control tipo regulador"**. En la mayoría de los casos, es necesario que la salida $y(k)$ siga a una entrada de

referencia $r(k)$, este sistema se denomina **"sistema de control tipo Servo"** y su configuración básica se muestra en la figura 9.4

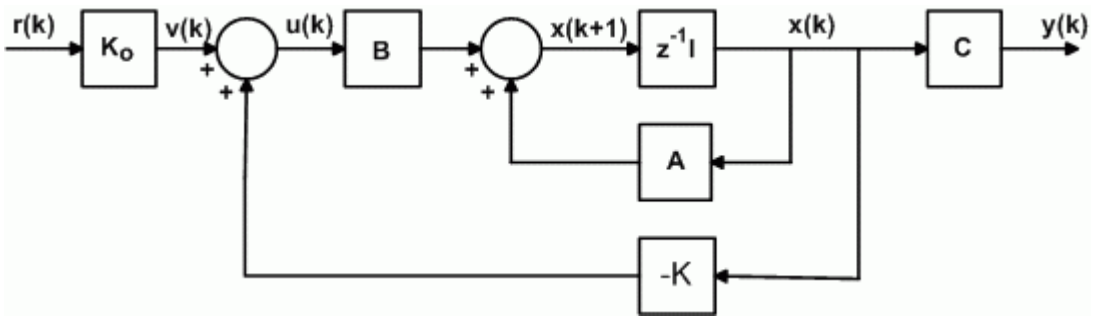


Figura 9.4 Sistema de control con realimentación de estado y entrada de referencia

Considerando el sistema de la figura 9.4, su comportamiento dinámico se puede definir por las siguientes ecuaciones de estado:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 9.37$$

$$y(k) = Cx(k) \qquad 9.38$$

La señal de control $u(k)$ está dada por:

$$u(k) = K_o r(k) - Kx(k) \qquad 9.39$$

En donde K_o es una constante que se debe determinar y $r(k)$ es la entrada de referencia.

Reemplazando la ecuación 9.39 en la 9.37 se obtiene:

$$x(k+1) = Ax(k) + BK_o r(k) - BKx(k)$$

$$x(k+1) = [A - BK]x(k) + BK_o r(k) \qquad 9.40$$

Tomando la transformada z a las ecuaciones 9.38 y 9.40 y asumiendo las condiciones iniciales iguales a cero resulta:

$$Y(z) = CX(z)$$

$$[zI - A + BK]X(z) = BK_o R(z)$$

$$X(z) = [zI - A + BK]^{-1} BK_o R(z)$$

$$Y(z) = C[zI - A + BK]^{-1} BK_o R(z)$$

Por lo tanto, la función de transferencia de lazo cerrado para el sistema es:

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = C\frac{adj[zI - A + BK]}{|zI - A + BK|}BK_o \qquad 9.41$$

La ecuación característica del sistema es:

$$|zI - A + BK| = 0 \qquad 9.42$$

La introducción de la matriz de ganancia de realimentación K modifica la ecuación característica del sistema original y al hacerlo, modifica también la ganancia de estado estable del sistema en lazo cerrado. En estas condiciones, la constante K_o se puede tomar como un parámetro de ajuste en el circuito del set-point, tal que el valor de la respuesta en régimen permanente del sistema ante un escalón unitario sea igual a la unidad, es decir, tal que $y(\infty) = 1$.

Al aplicar el teorema del valor final a la ecuación 9.41 y teniendo en cuenta que $R(z)$ es un escalón unitario, el error del sistema en estado establecerá igual a cero se cumple que:

$$y(\infty) = \lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1} G_w(z) = 1 \qquad 9.43$$

Es decir:

$$K_o \lim_{z\to 1} C[zI - A + BK]^{-1}B = 1$$

La ecuación 9.44 permite calcular el valor adecuado de K_o para que el error de estado estable del sistema en lazo cerrado ante una entrada en escalón unitario, aplicada en la señal de referencia, sea igual a cero.

EJEMPLO 9.3

Hallar el valor de K_o de modo que el sistema de flujo analizado en el ejemplo 9.2 tenga error cero ante una entrada en escalón unitario aplicado en la señal de referencia.

SOLUCION: En el ejemplo 9.2 se obtuvo que: $K = [0.2443 \quad 0.1623 \quad -0.0068]$. Para que el error de estado estable del sistema, en lazo cerrado, ante un cambio en escalón aplicado en la señal de referencia sea igual a cero, se debe cumplir que:

$$K_o \lim_{z\to 1} C[zI - A + BK]^{-1}B = 1$$

$$[zI - A + BK] = \begin{bmatrix} z - 0.5885 & 0.1623 & -0.0068 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & -1 & z \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$C[zI - A + BK]^{-1}B = [0 \quad 0.2073 \quad 0.1892] \begin{bmatrix} z - 0.5885 & 0.1623 & -0.0068 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & -1 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema, sin el factor de corrección de error K_o en el circuito del set-point es:

$$G_w(z) = C[zI - A + BK]^{-1}B = \frac{0.2073(z + 0.9126)}{z^3 - 0.588z^2 + 0.1632z - 0.0068}$$

$$K_o \lim_{z\to 1} \left[\frac{0.2073(z + 0.9126)}{z^3 - 0.588z^2 + 0.1632z - 0.0068}\right] = 1 \qquad K_o = 1.434$$

La figura 9.5 corresponde a la respuesta del sistema cuando se le adiciona el factor de corrección de error $K_o = 1.434$ en el circuito del set-point.

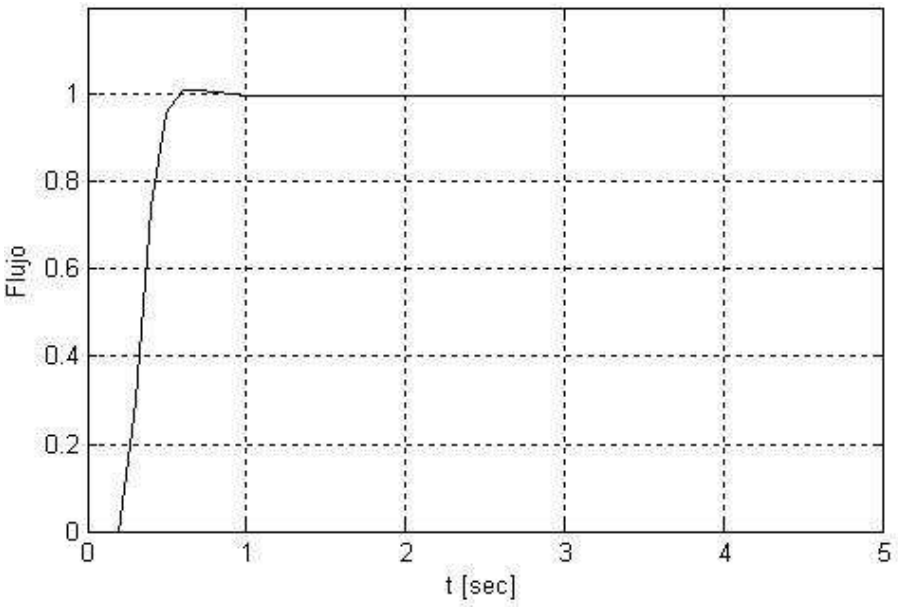


Figura 9.5 Respuesta del sistema con el factor de corrección de error K_0

9.6 OBSERVADORES DE ESTADO DE ORDEN COMPLETO

En la práctica, no todas las variables de estado de un sistema se pueden medir en forma directa. Este hecho hace necesario estimar el valor de aquellas variables de estado cuya medición directa no es posible. La estimación se debe realizar a partir de mediciones en las variables de entrada y en las variables de salida.

En esta sección se desarrolla una técnica que permite estimar los estados de una planta a partir de la información disponible en ella. El sistema que posibilita la estimación se denomina **"Observador o estimador de estado"**.

El observador de un sistema dinámico lineal en tiempo discreto es otro sistema dinámico lineal en tiempo discreto que tiene como entradas la entrada y la salida del sistema discreto y como salida, los valores de las variables de estado.

Sea el sistema definido por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 9.45$$

$$y(k) = Cx(k) \qquad 9.46$$

Para resolver el problema de la observación son posibles dos soluciones [9.3]:

a. Utilizar un **observador tipo predictor** que permite obtener el estado del sistema en el instante $(k+1)$, estimando $x(k+1)$ a partir de la entrada $x(k)$ y de la salida $y(k)$.

b. Utilizar un **observador corriente** que permite obtener el estado del sistema en el instante $(k+1)$ estimando $x(k+1)$ a partir de la entrada $u(k)$ y de la salida $y(k+1)$

Las figuras 9.6a y 9.6b representan, respectivamente los dos tipos de observadores. El orden de ellos es igual al orden del sistema.

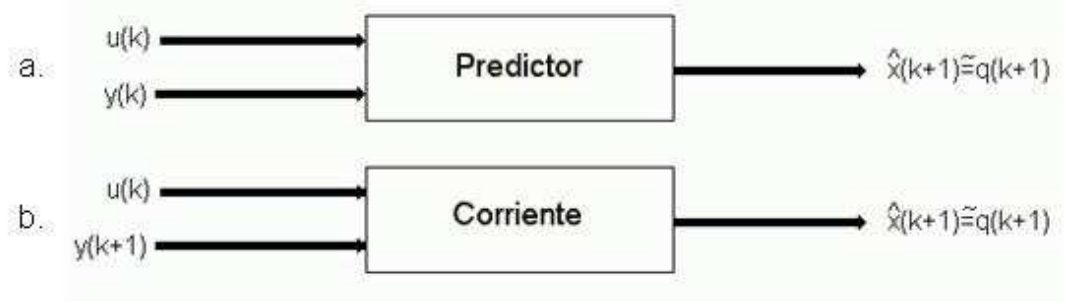


Figura 9.6 Observadores de estado a) Tipo Predictor b) Tipo Corriente

9.7 OBSERVADOR DE ESTADO TIPO PREDICTOR

Para obtener las ecuaciones que describen a este observador, se supone que el estado real del sistema $x(k)$ no puede medirse directamente. Si el estado $x(k)$ debe estimarse, es necesario que el estado estimado $q(k)$ y el estado real $x(k)$ sean iguales o lo más aproximadamente iguales. La figura 9.7 ilustra cómo se realiza la estimación de los estados.

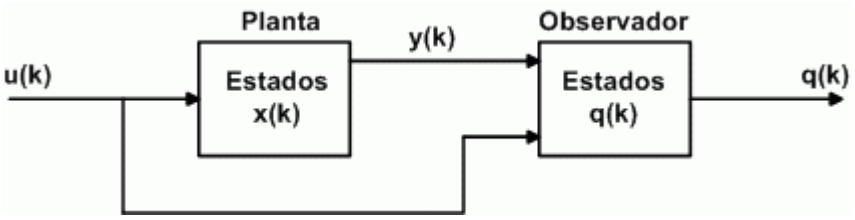


Figura 9.7 Estimador de estados

La planta está descrita mediante la ecuación:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 9.47$$
$$y(k) = Cx(k)$$

Tomando la transformada z se obtiene:

$$X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) \qquad 9.48$$
$$Y(z) = CX(z)$$

De la figura 9.7 se deduce que el sistema correspondiente al observador tiene dos entradas $u(k)$ e $y(k)$, entonces, su ecuación se puede escribir en la forma:

$$q(k+1) = Fq(k) + Ly(k) + Hu(k) \qquad 9.49$$

En donde F, L y H son matrices desconocidas. Tomando la transformada z a la ecuación 9.49 y considerando condiciones iniciales iguales a cero, resulta:

$$zQ(z) = FQ(z) + LY(z) + HU(z)$$
$$(zI - F)Q(z) = LY(z) + HU(z)$$
$$Q(z) = (zI - F)^{-1}[LY(z) + HU(z)]$$
$$Y(z) = CX(z)$$
$$Q(z) = (zI - F)^{-1}[LCX(z) + HU(z)] \qquad 9.50$$

Teniendo en cuenta la ecuación 9.48 se obtiene:

$$Q(z) = (zI - F)^{-1}[LC(zI - A)^{-1}B + H]U(z)$$

Si el estado real $x(k)$ de la planta es igual al estado estimado $q(k)$, las funciones de transferencia $Q(z)/U(z)$ y $X(z)/U(z)$ deben ser iguales es decir:

$$\frac{Q(z)}{U(z)} = (zI - F)^{-1}[LC(zI - A)^{-1}B + H]$$

$$\frac{X(z)}{U(z)} = (zI - A)^{-1}B$$

$$(zI - A)^{-1}B = (zI - F)^{-1}[LC(zI - A)^{-1}B + H]$$

$$(zI - A)^{-1}B = (zI - F)^{-1}LC(zI - A)^{-1}B + (zI - F)^{-1}H$$

$$[I - (zI - F)^{-1}LC](zI - A)^{-1}B = (zI - F)^{-1}H$$

$$(zI - F)^{-1}[zI - (F + LC)](zI - A)^{-1}B = (zI - F)^{-1}H$$

Simplificando:

$$[zI - (F + LC)](zI - A)^{-1}B = H$$

$$(zI - A)^{-1}B = [zI - (F + LC)]^{-1}H \qquad 9.51$$

La ecuación 9.51 se satisface si se cumple que $H = B$ y $A = F + LC$.

Entonces, la ecuación 9.49 correspondiente al observador predictor, se puede escribir en la forma:

$$q(k + 1) = (A - LC)q(k) + Ly(k) + Bu(k) \qquad 9.52$$

La matriz L se denomina **Matriz de ganancia de realimentación del observador.**

La figura 9.8 representa el sistema de control con la matriz de ganancia de realimentación K y el observador de estado incluidos.

De la figura 9.8 se deduce que $u(k) = -kq(k)$, así la ecuación del observador tipo predictor de orden completo se puede escribir en la forma:

$$q(k + 1) = (A - LC - BK)q(k) + Ly(k) \qquad 9.52a$$

Tomando transformada z a la ecuación 9.52:

$$zQ(z) - zq(0) = (A - LC)Q(z) + LY(z) + BU(z)$$

$$(zI - A + LC)Q(z) = LY(z) + BU(z) + zq(0)$$

$$Q(z) = (zI - A + LC)^{-1}[LY(z) + BU(z) + zq(0)] \qquad 9.53$$

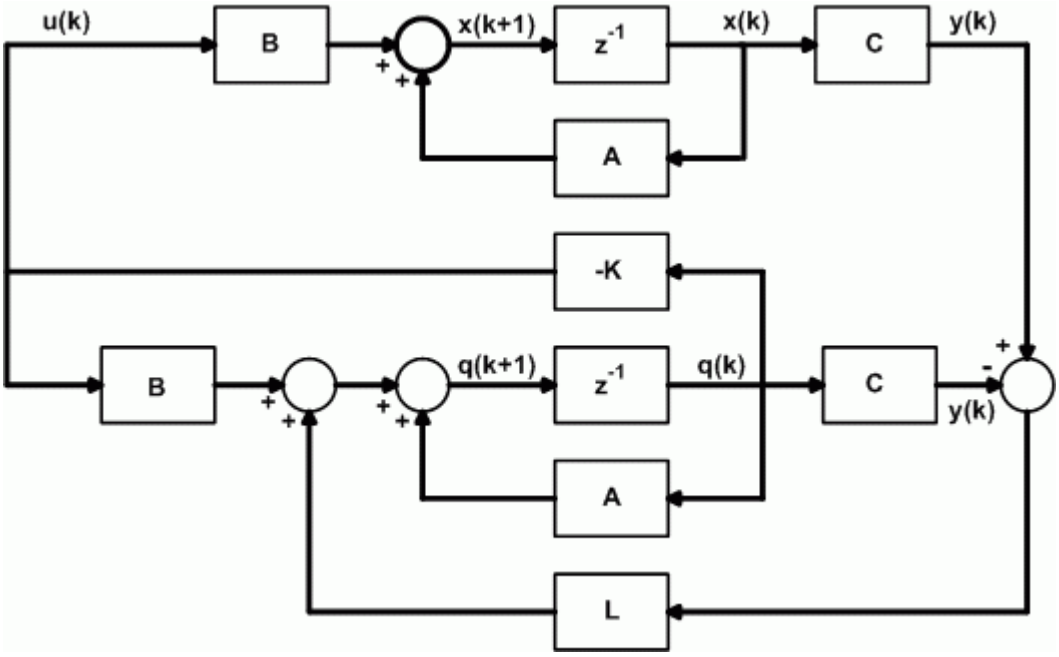


Figura 9.8 Sistema de Control con realimentación del estado observado

$$Q(z) = \frac{[adj(zI - A + LC)][LY(z) + BU(z) + zq(0)]}{|zI - A + LC|} \qquad 9.54$$

De la ecuación 9.52 y 9.54 se deduce que el observador es un sistema dinámico con $u(k)$ e $y(k)$ como entradas y con ecuación característica dada por:

$$|zI - A + LC| = 0 \qquad 9.55$$

9.7.1 Error en la estimación: se define como la diferencia entre el vector de estado real $x(k)$ y el vector de estado estimado $q(k)$ o sea:

$$e(k) = x(k) - q(k) \qquad 9.56$$

$$e(k+1) = x(k+1) - q(k+1) \qquad 9.57$$

Utilizando las ecuaciones 9.45 y 9.52 se obtiene:

$$e(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - (A - LC)q(k) - LCx(k) - Bu(k)$$

$$e(k+1) = (A - LC)[x(k) - y(k)]$$

$$e(k+1) = (A - LC)e(k) \qquad 9.58$$

De la ecuación 9.58 se deduce que la ecuación característica del error es la misma que la del observador.

$$|zI - A + LC| = 0 \qquad 9.59$$

Es decir, el comportamiento dinámico de la señal de error queda determinado por los valores característicos de la matriz $[A - LC]$. Si dicha matriz es estable el error converge a cero para cualquier error inicial $e(0)$. Es decir $q(k)$ converge a $x(k)$ independientemente de los valores iniciales de $x(0)$ y de $q(0)$.

El observador analizado se denomina predictor porque el valor estimado $q(k+1)$ está un período de muestreo adelante de $y(k)$.

9.7.2 Diseño de la matriz de ganancia del observador: la ecuación característica del observador de estado de orden completo se dedujo en la sección anterior y, está dada por:

$$|zI - A + LC| = 0 \qquad 9.60$$

La matriz L es una matriz pesante y se debe diseñar de modo que $q(k)$ se aproxime asintóticamente a $x(k)$ cuando $k \to \infty$. Es decir, para que la dinámica del error sea estable y que $e(k)$ llegue a cero con suficiente rapidez. El procedimiento para diseñar la matriz L consiste en seleccionar, primero, los polos deseados para el observador y luego, mediante la aplicación del procedimiento adecuado, calcular la matriz L.

Los polos de lazo cerrado deseados para el observador se diseñan de manera que el sistema cumpla con los requisitos de funcionamiento especificados y se eligen de modo que su respuesta sea de dos a cuatro veces más rápida que la del sistema.

Existen diferentes procedimientos para calcular la matriz de ganancia L del observador. A continuación se presentan dos de los más utilizados:

9.7.2.1 Método de sustitución directa: en este caso el procedimiento es el siguiente:

a. Obtener la ecuación característica del observador:

$$|zI - A + LC| = 0 \qquad 9.61$$

b. Conformar la ecuación característica con los polos de lazo cerrado deseados para el observador:

$$(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)=z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\alpha_2 z^{n-2}+\cdots\ \alpha_{n-1}z+\alpha_n \qquad 9.62$$

c. Igualar los coeficientes de potencias iguales en z de la ecuación característica del observador con los de la ecuación característica deseada, para obtener n ecuaciones simultáneas que al resolverlas, permiten calcular los componentes de la matriz de ganancia del observador L.

9.7.2.2 Formula de Ackerman: esta fórmula permite evaluar directamente la matriz de ganancia del observador a partir de la ecuación:

$$L=\phi(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \qquad 9.63$$

En donde:

$$\phi(A)=A^n+\alpha_1 A^{n-1}+\alpha_2 A^{n-2}+\cdots\ \alpha_{n-1}A+\alpha_n I \qquad 9.64$$

Siendo $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ los coeficientes de la ecuación característica deseada para el observador:

$$(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)=z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\alpha_2 z^{n-2}+\cdots\ \alpha_{n-1}z+\alpha_n \qquad 9.65$$

- El diseño de la matriz de ganancia de realimentación K y el diseño de la matriz de ganancia del observador L, son dos problemas independientes entre si que se combinan para obtener el sistema de control con realimentación de estado observado.

EJEMPLO 9.4:

Considere el sistema definido por:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.5 & -0.4\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k) \qquad y(k)=[1 \quad -1]x(k)$$

a) Determine la matriz de ganancia de realimentación L del observador, de modo que los valores característicos deseados para la matriz del observador sean

$z_1 = 0.5 + j0.5$ y $z_2 = 0.5 - j0.5$ b) Obtenga la ecuación del observador correspondiente.

SOLUCION: Para una mejor comprensión, el ejemplo se resuelve utilizando los dos métodos expuestos:

a) Método de sustitución directa:

Ecuación característica del observador:

$$|zI - A + LC| = 0 \qquad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

$$[zI - A + LC] = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} [1 \quad -1] = \begin{bmatrix} z + L_1 & -(L_1 + 1) \\ L_2 + 0.5 & z + 0.4 - L_2 \end{bmatrix}$$

$$|zI - A + LC| = z^2 + (0.4 - L_2 + L_1)z + 0.9L_1 + L_2 + 0.5 = 0$$

Ecuación característica deseada:

$$(z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5) = 0$$

$$z^2 - z + 0.5 = 0$$

Comparación de coeficientes de potencias iguales en z en las dos ecuaciones:

$$0.4 - L_2 + L_1 = -1 \qquad L_1 - L_2 = -1.4$$

$$0.9L_1 + L_2 + 0.5 = 0.5 \qquad 0.9L_1 + L_2 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se obtiene: $L_1 = -0.7368$ y $L_2 = 0.6631$

Por lo tanto, la matriz de ganancia del observador es:

$$L = \begin{bmatrix} -0.7368 \\ 0.6631 \end{bmatrix}$$

La ecuación del observador está dada por la ecuación 9.52:

$$q(k+1) = (A - LC)q(k) + Ly(k) + Bu(k)$$

$$[A - LC] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.7368 \\ 0.6631 \end{bmatrix} [1 \quad -1] = \begin{bmatrix} 0.7368 & 0.2632 \\ -1.1631 & 0.2632 \end{bmatrix}$$

$$q(k+1) = \begin{bmatrix} 0.7368 & 0.2632 \\ -1.1631 & 0.2632 \end{bmatrix} q(k) + \begin{bmatrix} -0.7368 \\ 0.6631 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

b) Utilizando la formula de Ackerman:

$$L = \phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene:

$$[CA] = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.4 \end{bmatrix} = [0.5 \quad 1.4] \qquad \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 1.4 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica deseada es: $z^2 - z + 0.5 = 0$, por lo tanto:

$$\phi(A) = A^2 - A + 0.5I = \begin{bmatrix} 0 & -1.4 \\ 0.7 & 0.56 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1.4 \\ 0.7 & 0.56 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 1.4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} -0.7368 \\ 0.6631 \end{bmatrix}$$

9.7.3 Ecuación Característica del Sistema con el Observador Predictor Incluido: Considerando el sistema definido por la ecuación de estado:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{9.66}$$

$$y(k) = Cx(k) \tag{9.67}$$

La ley de control para el sistema con el observador es, según la figura 9.8:

$$u(k) = -Kq(k) \tag{9.68}$$

Reemplazando la ecuación 9.68 en la ecuación 9.66.

$$x(k+1) = Ax(k) - BKq(k) = [A - BK]x(k) + BK[x(k) - q(k)] \tag{9.69}$$

La diferencia $x(k) - q(k)$ corresponde al error $e(k)$, entonces:

$$x(k+1) = [A - BK]x(k) + BKe(k) \tag{9.70}$$

Según la ecuación 9.58 se tiene que:

$$e(k+1) = [A - LC]e(k) \tag{9.71}$$

Las ecuaciones 9.70 y 9.71 se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \tag{9.72}$$

La ecuación 9.72 define la dinámica del sistema con realimentación de estado observado y de ella se deduce que la ecuación característica del sistema en lazo cerrado, con la matriz de realimentación K y el observador incluido es:

$$\begin{vmatrix} zI - A + BK & -BK \\ 0 & zI - A + LC \end{vmatrix} = 0$$

$$|zI - A + BK||zI - A + LC| = 0 \tag{9.73}$$

9.7.4 Función de Transferencia de Pulso del Controlador: una vez obtenida la matriz de ganancia de realimentación K y la matriz de ganancia del observador L,

es posible obtener la función de transferencia de pulso del controlador. Se hace notar que, para este controlador, la entrada es $-Y(z)$ y la salida $U(z)$.

La figura 9.9a muestra el sistema de control equivalente con realimentación unitaria y con entrada de referencia igual a cero (sistema tipo regulador). La figura 9.9b muestra la configuración del hardware. Más adelante se analiza el caso de sistemas con entrada de referencia predeterminada.

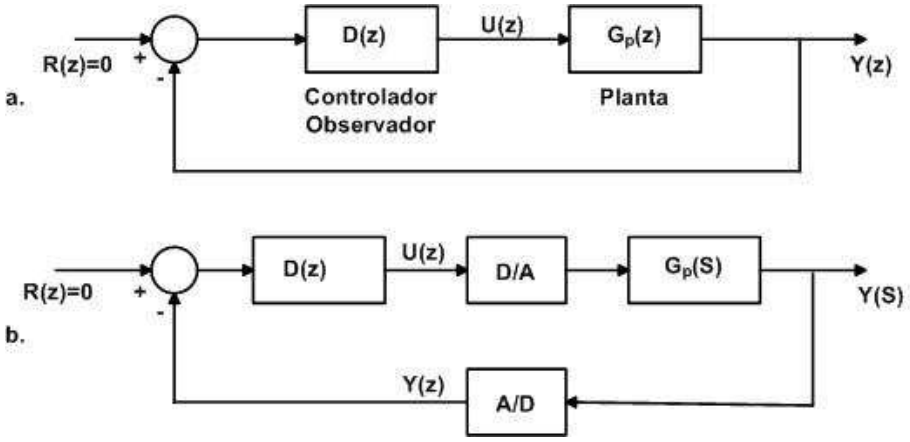


Figura 9.9 Implementación del controlador digital

De la ecuación 9.52a se obtiene:

$$q(k+1) = (A - LC - BK)q(k) + Ly(k)$$

Tomando la transformada z a esta ecuación y, considerando las condiciones iniciales iguales a cero resulta:

$$zQ(z) = [A - LC - BK]Q(z) + LY(z)$$

$$[zI - A + BK + LC]Q(z) = LY(z)$$

$$Q(z) = [zI - A + BK + LC]^{-1}LY(z)$$

La ley de control es, según la ecuación 9.68

$$u(k) = -Kq(k) \qquad U(z) = -KQ(z)$$

Entonces:

$$U(z) = -KQ(z) = -K[zI - A + BK + LC]^{-1}LY(z)$$

Es decir:

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = K[zI - A + BK + LC]^{-1}L \qquad 9.74$$

La ecuación 9.74 permite estimar la función de transferencia de pulso del controlador con el observador tipo predictor.

EJEMPLO 9.5

Dado el sistema de control en tiempo discreto mostrado en la figura 9.10. a) Hallar la matriz de ganancia K de modo que la respuesta del sistema en lazo cerrado tenga un máximo sobreimpulso del 10% y tiempo de pico de 4 seg. b) Diseñar un observador adecuado para el sistema. c) obtener la ecuación del controlador y la respuesta del sistema en lazo cerrado ante una entrada en escalón unitario. Asuma que el período de muestreo es 1 seg.

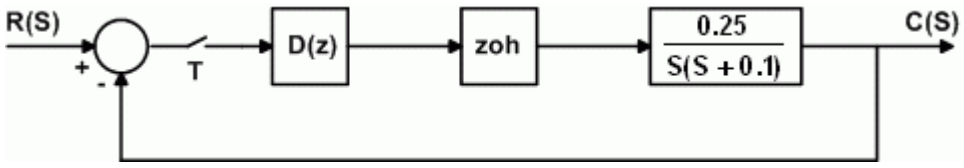


Figura 9.10 Sistema de Control para el ejemplo 9.5

SOLUCION: Con $T = 1\,s$, la función de transferencia de pulso del sistema es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad G_p(S) = \frac{0.25}{S(S + 0.1)}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{0.25}{S^2(S + 0.1)}\right\} \qquad HG(z) = \frac{0.1209(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048)}$$

$$HG(z) = \frac{0.1209z + 0.1169}{z^2 - 1.9048z + 0.9048}$$

La representación en el espacio de estado del sistema en su forma canónica controlable es:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.9048 & -0.9048 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0.1209 \quad 0.1169]x(k)$$

a) De acuerdo con las especificaciones dadas, la ubicación de los polos de lazo cerrado deseados para estimar la matriz de ganancia de realimentación K, se calcula así:

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \xi = -\frac{\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(M_p))^2}} \qquad \xi = 0.59$$

$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad w_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\xi^2}} \qquad w_n = 0.972\ rad/s$$

La ubicación de los polos deseados es por lo tanto:

$$|z| = e^{-\xi w_n T} \qquad |z| = 0.563$$

$$\theta = 57.3 w_n T\sqrt{1-\xi^2} \qquad \theta = 45^o \qquad z = 0.398 \pm j0.398$$

La ecuación característica deseada para el sistema es, entonces:

$$(z - 0.398 - j0.398)(z - 0.398 + j0.398) = z^2 - 0.796z + 0.3168 = 0$$

Utilizando la formula de Ackerman:

$$K = [0 \quad 1][B \quad AB]^{-1}\phi(A)$$

$$\phi(A) = A^2 - 0.796A + 0.3168I \qquad \phi(A) = \begin{bmatrix} 1.5241 & -1.0032 \\ 1.1088 & -0.5880 \end{bmatrix}$$

$$[B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1.9048 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 1.9048 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1.5241 & -1.0032 \\ 1.1088 & -0.5880 \end{bmatrix} \qquad K = [1.1088 \quad -0.588]$$

b) Para diseñar el observador, se debe tener en cuenta que su velocidad debe ser mayor que la del sistema. Sea $\xi = 0.59$ y $w_n = 1.5\ rad/s$. Con estos parámetros, la ubicación de los polos deseados para el observador es:

$$|z| = e^{-\xi w_n T} \qquad |z| = 0.412$$

$$\theta = 57.3 w_n T\sqrt{1-\xi^2} \qquad \theta = 69.4^{\,o}$$

Es decir, los polos deseados son $z = 0.145 \pm j0.385$. Así, la ecuación característica deseada para el observador es:

$$(z - 0.145 - j0.385)(z - 0.145 + j0.385) = z^2 - 0.29z + 0.16925 = 0$$

Utilizando la formula de Ackerman:

$$L = \phi(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = A^2 - 0.29A + 0.16925I = \begin{bmatrix} 2.3404 & -1.4612 \\ 1.6148 & -0.7356 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1209 & 0.1169 \\ 0.3472 & -0.7356 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2.3404 & -1.4612 \\ 1.6148 & -0.7356 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1209 & 0.1169 \\ 0.3472 & -0.7356 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 8.3634 \\ 5.1586 \end{bmatrix}$$

La ecuación del observador está dada por:

$$q(k+1) = [A - LC - BK]q(k) + Ly(k)$$

$$q(k+1) = \begin{bmatrix} 0.2155 & -1.2949 \\ 0.3761 & -0.6033 \end{bmatrix} q(k) + \begin{bmatrix} 8.3634 \\ 5.1586 \end{bmatrix} y(k)$$

c) La ecuación del controlador está dada por:

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = K[zI - A + BK + LC]^{-1}L$$

$$[zI - A + BK + LC] = \begin{bmatrix} z + 0.2151 & 1.2944 \\ -0.3764 & z + 0.6030 \end{bmatrix}$$

$$[zI - A + BK + LC]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} z + 0.6030 & -1.2944 \\ 0.3764 & z + 0.2151 \end{bmatrix}}{z^2 + 0.8188z + 0.6171}$$

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{[1.1088 \quad -0.588]\begin{bmatrix} z + 0.6030 & -1.2944 \\ 0.3764 & z + 0.2151 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8.3634 \\ 5.1586 \end{bmatrix}}{z^2 + 0.8188z + 0.6171}$$

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{6.2403(z - 0.6916)}{z^2 + 0.8188z + 0.6171}$$

La función de transferencia de lazo cerrado para el sistema es:

$$G_w(z) = \frac{HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

$$G_w(z) = \frac{0.1209z^3 + 0.216z^2 + 0.1704z + 0.07219}{z^4 - 1.086z^3 + 0.7169z^2 - 0.2266z + 0.05362}$$

La figura 9.11 corresponde a la respuesta del sistema de control en lazo cerrado con las matrices K y L diseñadas

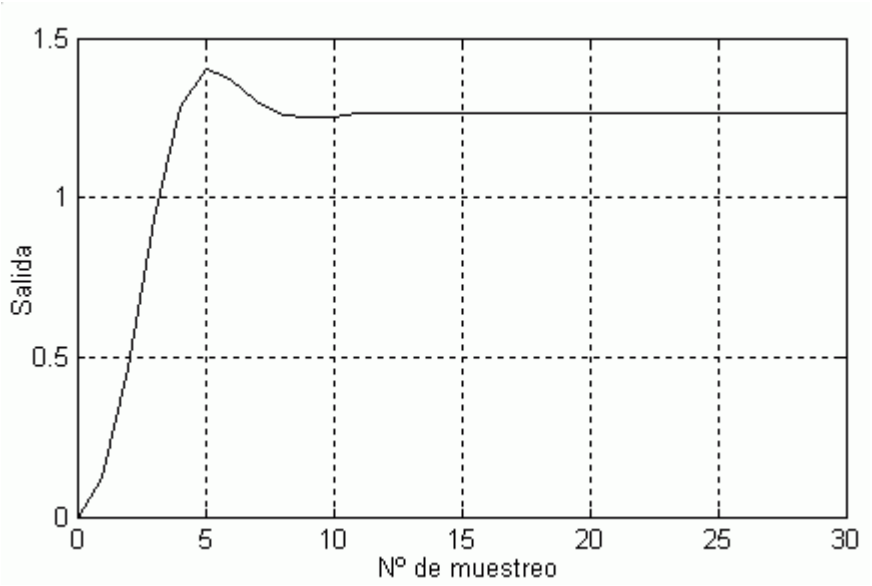


Figura 9.11 Respuesta del sistema del ejemplo 9.5

Si se desea tener un error igual a cero, ante una entrada en escalón, es necesario adicionar un factor de corrección de error K_o en el circuito del set-point como se indica en la figura 9.12

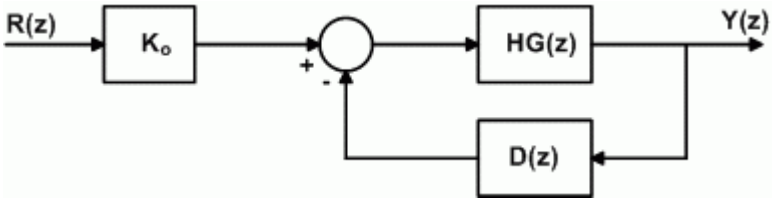


Figura 9.12 Sistema de control por realimentación de estados con factor de corrección de error en el circuito del set-point

De la figura 9.12 se obtiene

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} \qquad 9.75$$

Si la entrada es un escalón unitario se obtiene:

$$Y(z) = \frac{K_0 HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Teniendo en cuenta el teorema del valor final:

$$y(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, Y(z)$$

Para que el error sea cero debe cumplirse que $y(\infty) = 1$, por lo tanto:

$$\lim_{z \to 1} \frac{K_0 HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} = 1 \qquad 9.76$$

Para el caso del ejemplo 9.5 se tiene:

$$\lim_{z \to 1} \frac{K_o(0.1209z^3 + 0.216z^2 + 0.1704z + 0.07219)}{z^4 - 1.086z^3 + 0.7169z^2 - 0.2266z + 0.05362}$$

$$1.265K_o = 1 \qquad K_o = 0.79$$

$1.265K_0 = 1$ $\qquad$ $K_0 = 0.79$

La figura 9.13 muestra la respuesta del sistema con $K_o = 0.79$ introducida en el circuito del set-point.

La función de transferencia del lazo cerrado del sistema es:

$$G_w(z) = \frac{0.79(0.1209z^3 + 0.216z^2 + 0.1704z + 0.07219)}{z^4 - 1.086z^3 + 0.7169z^2 - 0.2266z + 0.05362}$$

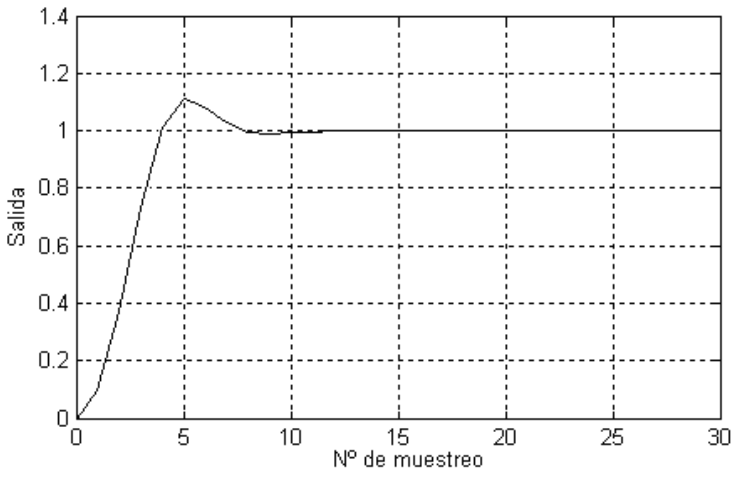


Figura 9.13 Respuesta del sistema del ejemplo 9.5 con $K_0 = 0.79$

A continuación se presenta un programa en MATLAB que se puede utilizar para resolver el problema del ejemplo 9.5.

```
% Programa para diseño con observador de estado en
% tiempo discreto partiendo del sistema continuo.
clc
n=[0.25];
d=[1 0.1 0];
[nd,dd]=c2dm(n,d,1,'zoh');                    % Discretización del sistema.
[z,p,k]=tf2zp(nd,dd)
printsys(nd,dd,'z')
[a,b,c,d]=tf2ss(nd,dd)
pc=[0.398+0.398*i  0.398-0.398*i];
po= [0.145+0.385*i  0.145 -0.385*i];
k=acker(a,b,pc)
l=acker(a',c',po)'
ac=[a-b*k-l*c];                               %  Calculo de controlador
bc=[l];
cc=[k];
dc=[0];
[nc1,dc1]=ss2tf(ac,bc,cc,dc);                 %  Ecuación del controlador
printsys(nc1,dc1,'z')
[zc,pc,kc]=tf2zp(nc1,dc1)
[aw,bw,cw,dw]=feedback(a,b,c,d,ac,bc,cc,dc,-1);
[nwt,dwt]=ss2tf(aw,bw,cw,dw);                 %  Sistema en lazo  cerrado
printsys(nwt,dwt,'z')
[zw,pw,kw]=tf2zp(nwt,dwt)
k=0:30;
r=ones(1,31);                                 %  Genera escalón unitario
y=filter(nwt,dwt,r);
plot(k,y)
```

```
grid
pause
ko=ddcgain(nwt,dwt);                    %  Factor de corrección
plot(k,y/ko)
grid
pause
[y,x,k1]=dstep(aw,bw,cw,dw);
plot(y)
grid
pause
plot(x)
grid
```

9.8 OBSERVADOR DE ESTADO TIPO CORRIENTE

En el observador tipo predictor, el estado observado $q(k)$ se obtiene a partir de la medición del vector de salida hasta $y(k-1)$ y del vector de control hasta $u(k-1)$. Por lo tanto, el vector de control $u(k) = -kq(k)$ no utiliza los valores presentes de la salida $y(k)$. En esta sección se deduce la ecuación de un observador llamado **Observador Corriente** en el cual se utiliza $y(k)$ para la estimación de $q(k)$.

Sea el sistema de estado completamente controlable y completamente observable definido por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 9.77$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Se desea estimar el vector estado $x(k)$ a partir del vector $q(k)$. Para ello se puede separar el proceso de observación en dos pasos: en el primer paso se calcula $\hat{q}(k+1)$ que es una aproximación de $x(k+1)$ y en el segundo, se utiliza $y(k+1)$ para mejorar $\hat{q}(k+1)$ en la siguiente forma:

$$\hat{q}(k+1) = Aq(k) + Bu(k) \qquad 9.78$$

$$q(k+1) = \hat{q}(k+1) + L[y(k+1) - C\hat{q}(k+1)] \qquad 9.79$$

Reemplazando la ecuación 9.78 en la 9.79 se obtiene:

$$q(k+1) = Aq(k) + Bu(k) + Ly(k+1) - LCAq(k) - LCBu(k)$$

Entonces, la ecuación del observador corriente es:

$$q(k+1) = [A - LCA]q(k) + [B - LCB]u(k) + Ly(k) \qquad 9.80$$

La ecuación 9.80 permite deducir que el valor estimado para $q(k+1)$ se basa en el valor de $y(k+1)$.

La ecuación característica del observador corriente es:

$$|zI - A + LCA| = 0 \qquad 9.81$$

Para un sistema de una sola entrada y una sola salida, la matriz de ganancia L del observador corriente se calcula en forma similar a la matriz L del observador predictor pero, en este caso, al utilizar la fórmula de Ackerman, se reemplaza la matriz C por la matriz CA. Por lo tanto, para el observador corriente, la fórmula de Ackerman toma la forma:

$$L = \phi(A)\begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad 9.82$$

Teniendo en cuenta que la ley de control es:

$$u(k) = -Kq(k) \qquad 9.83$$

La ecuación 9.80 se puede escribir en la forma:

$$q(k+1) = [A - LCA - BK + LCBK]q(k) + Ly(k+1) \qquad 9.84$$

Se puede demostrar, a partir de las ecuaciones 9.83 y 9.84, que la función de transferencia de pulso del controlador, cuando se utiliza el observador corriente, está dada por:

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = zK[zI - A + LCA + BK - LCBK]^{-1}L \qquad 9.85$$

EJEMPLO 9.6

Dado el sistema de tiempo discreto definido por:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.4\end{bmatrix}q(k)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(k) \qquad y(k)=[0.5 \quad -0.4]x(k)$$

a) Calcular la matriz de ganancia de realimentación K para que el sistema tenga respuesta con oscilaciones muertas. b) Diseñar un observador corriente tal que su respuesta al error del observador inicial sea con oscilaciones muertas. c) Obtener la ecuación del controlador y la respuesta del sistema ante una entrada en escalón unitario. d) Calcular el factor de corrección de error K_o de modo que el error de estado estable del sistema, ante una entrada en escalón, sea igual a cero

SOLUCION: Para respuesta con oscilaciones muertas (respuesta Deadbeat), se requiere que los polos del sistema en lazo cerrado estén ubicados en el origen del circulo unitario.

a) Diseño de la matriz de ganancia de realimentación:

$$K=[0 \quad 1][B \quad AB]^{-1}\phi(A)$$

Ecuación característica deseada:

$$z^2=0$$

Por lo tanto:

$$\phi(A)=A^2 \qquad \phi(A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.16\end{bmatrix}$$

$$[B \quad AB]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0.4\end{bmatrix} \qquad [B \quad AB]^{-1}=\begin{bmatrix}-0.6667 & 1.6667\\ 1.6667 & -1.6667\end{bmatrix}$$

$$K=[0 \quad 1]\begin{bmatrix}-0.6667 & 1.6667\\ 1.6667 & -1.6667\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.16\end{bmatrix} \qquad K=[1.6667 \quad -0.2667]$$

a) Diseño del observador corriente:

$$L=\phi(A)\begin{bmatrix}CA\\ CA^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\phi(A)=A^2 \qquad \phi(A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.16\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & -0.16\\ 0.5 & -0.064\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}CA\\ CA^2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1.3333 & 3.3333\\ -10.4167 & 10.4167\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.3333 & 3.3333\\ -10.4167 & 10.4167\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix}3.3333\\ 1.6667\end{bmatrix}$$

La ecuación del observador es:

$$q(k+1) = [A - LCA - BK + LCBK]q(k) + Ly(k+1)$$

$$q(k+1) = \begin{bmatrix} -1.7778 & 0.7111 \\ -2.2222 & 0.8889 \end{bmatrix} q(k) + \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 1.6667 \end{bmatrix} y(k+1)$$

La ecuación del controlador está dada por:

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = zK[zI - A + LCA + BK - LCBK]^{-1}L$$

Realizando operaciones se obtiene:

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{5.111z - 1.778}{z + 0.8889}$$

La figura 9.14 representa el sistema de control con el controlador diseñado.

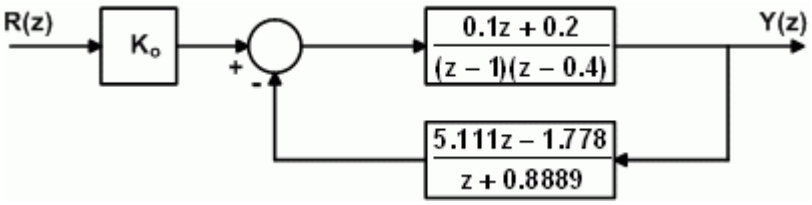


Figura 9.14 Sistema de control para el ejemplo 9.6

La función de transferencia de pulso del sistema en lazo cerrado es, según la figura 9.14:

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.1K_o(z^2 + 2.889z + 1.778)}{z^3}$$

El valor de K_o se obtiene a partir de la ecuación 9.71:

$$\lim_{z \to 1} \frac{0.1K_o(z^2 + 2.889z + 1.778)}{z^3} = 1 \qquad K_o = 1.7646$$

La figura 9.15a muestra la respuesta del sistema a un escalón unitario aplicado en la referencia, sin incluir el factor de corrección de error K_o. La figura 9.15b muestra la respuesta con el factor K_o incluido en el circuito del set-point.

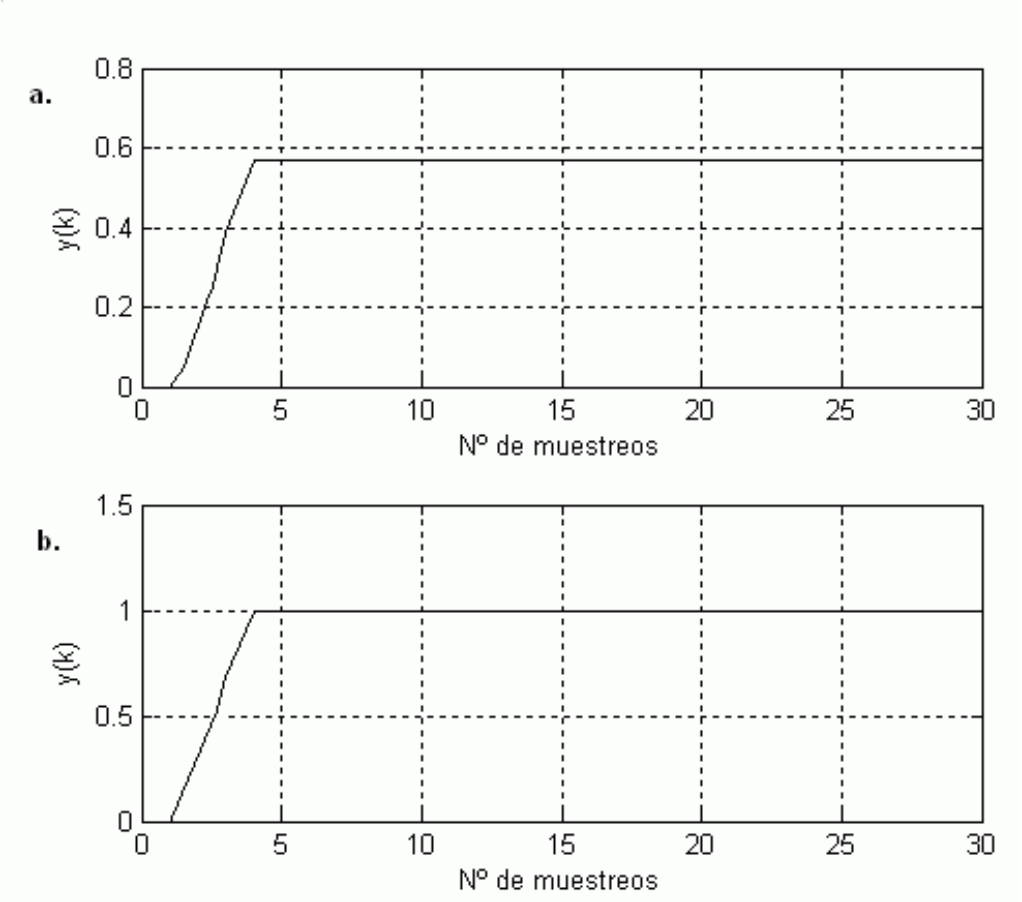


Figura 9.15 a) Respuesta del sistema al escalón unitario sin el factor K_0
b) Respuesta del sistema al escalón unitario con $k_0 = 1.7646$

A continuación se presenta un programa en MATLAB para resolver el ejemplo 9.6

```
% DISEÑO DE UN OBSERVADOR CORRIENTE.
a=[1  0; 0  0.4];
b=[1;1];
c=[0.5  -0.4 ];
d=[0];
[nd,dd]=ss2tf(a,b,c,d);                    % Función de transferencia de pulso
printsys(nd,dd,'z')
pc=[0 0];                                  % Polos para la matriz k.
po=[0 0];                                  % Polos para el observador.
```

```
po1=poly(po);                          % Ecuación característica deseada
k=acker(a,b,po)
q=[c*a;c*(a^2)];
qi=inv(q);
f=polyvalm(po1,a);                     % ϕ(A)
m=[0;1];
l=(f*qi)*m
ao=[a-(l*c)*a-b*k+((l*c)*(b*k))]       % Matriz del observador
bo=l;
co=k;
do=d;
[no1 do1]=ss2tf(ao,bo,co,do);
nc=[no1 0];
dc=[0 do1];
printsys(nc,dc,'z')
[nw,dw]=feedback(nd,dd,nc,dc,-1);
printsys(nw,dw,'z')
dim=size(dw,2);
if dw(1)==0
 dwe=dw(2:dim);
else
 dwe=dw;
end
k1=0:30;
r=ones(1,31);
y=filter(nw,dwe,r);
subplot(2,2,1)
plot(k1,y)
xlabel('Nº de muestreos')
ylabel('y(k)')
```

```
pause
ko=ddcgain(nw,dw);                    % Factor de corrección  K0
subplot(2,2,2)
plot(k1,y/ko)
xlabel('Nº de muestreos')
ylabel('y(k)')
```

9.9 OBSERVADOR DE ESTADO DE ORDEN REDUCIDO

En la práctica, algunas de las variables de estado del sistema pueden ser medidas exactamente y, por lo tanto, no es necesario estimarlas. En este caso, es posible diseñar un observador que estime menos de las n variables que conforman el vector de estado. Un observador de este tipo se conoce con el nombre de **Observador de Estado de Orden Reducido.** Si el número de variables a estimar es el mínimo posible, el observador se llama **Observador de Orden Mínimo.**

Sea $x_a(k)$ la parte del vector de estado que puede medirse exactamente y sea $x_b(k)$ la parte no medible, el observador de orden reducido puede diseñarse dividiendo el vector de estado en la forma:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix} \tag{9.86}$$

Entonces, la ecuación del sistema puede escribirse así:

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \hline x_b(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{aa} & A_{ab} \\ \hline A_{ba} & A_{bb} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \hline x_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \hline B_b \end{bmatrix} u(k) \tag{9.87}$$

$$y(k) = [I|0] \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \hline x_b(k) \end{bmatrix}$$

La ecuación correspondiente a la parte medible es:

$$x_a(k+1) = A_{aa}x_a(k) + A_{ab}x_b(k) + B_a u(k) \tag{9.88}$$

Agrupando los términos conocidos se obtiene:

$$x_a(k+1) - A_{aa}x_a(k) - B_a u(k) = A_{ab}x_b(k) \tag{9.89}$$

El término de la izquierda de la ecuación 9.89 corresponde a las cantidades medidas.

La ecuación correspondiente a la parte no medible es:

$$x_b(k+1) = A_{ba}x_a(k) + A_{bb}x_b(k) + B_b u(k) \quad 9.90$$

El término $[A_{ba}x_a(k) + B_b u(k)]$ se puede considerar como la entrada conocida.

Al comparar las ecuaciones del observador de orden completo, con la ecuación 9.90 y la de la salida del sistema con la ecuación 9.89 resulta:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad 9.91$$

$$x_b(k+1) = A_{bb}x_b(k) + [A_{ba}x_a(k) + B_b u(k)] \quad 9.92$$

$$y(k) = Cx(k) \quad 9.93$$

$$x_a(k+1) - A_{aa}x_a(k) - B_a u(k) = A_{ab}x_b(k) \quad 9.94$$

$$q(k+1) = [A - LC]q(k) + Ly(k) + Bu(k) \quad 9.95$$

La ecuación del observador de orden reducido, se puede obtener haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación del observador de orden completo (ecuación 9.95).

$x(k) = x_b(k)$

$A = A_{bb}$

$Bu(k) = A_{ba}x_a(k) - B_b u(k)$

$y(k) = x_a(k+1) - A_{aa}x_a(k) - B_a u(k)$

$C = A_{ab}$

Es decir:

$q_b(k+1) =$

$$[A_{bb} - LA_{ab}]q_b(k) + L[x_a(k+1) - A_{aa}x_a(k) - B_a u(k)] + A_{ba}x_a(k) + B_b u(k) \quad 9.96$$

De la ecuación 9.87 se obtiene:

$$y(k) = x_a(k) \quad 9.97$$

Entonces:

$$q_b(k+1) = [A_{bb} - LA_{ab}]q_b(k) + Ly(k+1) + [A_{ba} - LA_{aa}]y(k) + [B_b - LB_a]u(k) \quad 9.98$$

La ecuación característica del observador de orden reducido es:

$$|zI - A_{bb} + LA_{ab}| = 0 \quad 9.99$$

La matriz L se puede obtener por comparación directa entre la ecuación característica deseada para el observador de orden reducido y la ecuación

característica del mismo dada por la ecuación 9.99 o utilizando la formula de Ackerman:

$$L = \phi(A_{bb}) \begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab}A_{bb} \\ A_{ab}A_{bb}^2 \\ \vdots \\ A_{ab}A_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad 9.100$$

En donde:

$$\phi(A_{bb}) = A_{bb}^{n-1} + \alpha_1 A_{bb}^{n-2} + \cdots \alpha_{n-2}A_{bb} + \alpha_{n-1}I \qquad 9.101$$

Siendo $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$ los coeficientes de la ecuación característica deseada y n el orden de la matriz A.

Finalmente, una vez calculadas la matriz de ganancia de realimentación K y la matriz del observador L se procede a calcular la ecuación del controlador, utilizando la ecuación [9.4]:

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} =$$

$$K_1 + K_b[zI - A_{bb} + LA_{ab} + (B_b - LB_a)K_b]^{-1}[Lz + \{A_{ba} - LA_{aa} - K_1(B_b - LB_a)\}] \qquad 9.102$$

Para obtener la ecuación 9.102 se asume que $y(k) = x_1(k)$ y que la matriz de ganancia de realimentación K, se particiona de tal forma que:

$$u(k) = -K[y(k) \quad q_b(k)]^T = -[K_1 \quad K_b][y(k) \quad q_b(k)]^T \qquad 9.103$$

$$u(k) = -K_1 y(k) - K_b q_b(k)$$

Para utilizar correctamente las ecuaciones 9.102 y 9.103 es necesario tener presente que la matriz C debe estar en la forma $C = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; . \;\; . \;\; 0]$, en caso contrario se precisa utilizar una matriz de transformación T tal que:

$$CT^{-1} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]T$$

Así, la nueva representación de estado del sistema será:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \qquad 9.105$$

$$\hat{y}(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}u(k) \qquad 9.106$$

En donde:

$$\hat{A} = TAT^{-1} \qquad \hat{B} = TB$$
$$\hat{C} = CT^{-1} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \qquad \hat{D} = D \qquad 9.107$$

EJEMPLO 9.7

Considere el sistema descrito por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2.3 & -1.7 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [0 \quad 0 \quad 0.8]x(k)$$

a) Determine la matriz de ganancia de realimentación K de modo que el sistema tenga polos de lazo cerrado ubicados en $z = 0.2$, $z = 0.4$ y $z = 0.6$. b) Si se supone que sólo la salida $y(k)$ es medible, diseñe un observador de orden mínimo con polos localizados en $z = 0.2$ y $z = 0.5$. c) Obtenga la ecuación del controlador y grafique la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando se aplica un escalón unitario a la referencia. d) Calcule, si es necesario, el valor del factor de corrección de error K_o que se debe adicionar en el circuito del set-point para obtener un error de estado estable igual a cero.

SOLUCION: Para resolver el problema, es necesario obtener la representación de estado del sistema de modo que $C = [1 \quad 0 \quad 0]$.

La matriz que transforma a $C = [0 \quad 0 \quad 0.8]$ en $C = [1 \quad 0 \quad 0]$ es: $C = [1 \quad 0 \quad 0]T$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.25 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando la ecuación 9.107:

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.3 & -1.7 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.25 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & -1.7 & 2.3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CT^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0.8] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.25 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

a) La matriz de ganancia de realimentación K es:

$$K = [0 \quad 0 \quad 1][\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B}]^{-1}\phi(\hat{A})$$

La ecuación característica deseada para el sistema en lazo cerrado es:

$$(z-0.2)(z-0.4)(z-0.6) = z^3 - 1.2z^2 + 0.44z - 0.048 = 0$$

Por lo tanto:

$$\phi(\hat{A}) = \hat{A}^3 - 1.2\hat{A}^2 + 0.44\hat{A} - 0.048I = \begin{bmatrix} 0.352 & -1.008 & 0.88 \\ 0.550 & -1.518 & 1.27 \\ 0.635 & -1.719 & 1.403 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 2.3 \\ 1 & 2.3 & 3.59 \end{bmatrix} \qquad [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2.125 & -2.3 & 1 \\ -2.875 & 1 & 0 \\ 1.25 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz de ganancia de realimentación está dada por:

$$K = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 2.125 & -2.3 & 1 \\ -2.875 & 1 & 0 \\ 1.25 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.352 & -1.008 & 0.88 \\ 0.550 & -1.518 & 1.27 \\ 0.635 & -1.719 & 1.403 \end{bmatrix}$$

$$K = [0.44 \quad -1.26 \quad 1.1]$$

b. Dado que sólo se puede medir la salida $y(k)$, la única variable de estado conocida será $x_1(k)$. Por lo tanto, es necesario estimar las otras dos variables y el orden del observador de orden mínimo es 2. Entonces, la representación de estado del sistema se puede escribir en la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & -1.7 & 2.3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k \\ x_3(k \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]u(k) \qquad y(k) = [1|0 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k \\ x_3(k \end{bmatrix}$$

La matriz de ganancia L del observador se puede calcular mediante la formula de Ackerman:

$$L = \phi(A_{bb})\begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab}A_{bb} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica deseada para el observador es:

$$(z-0.2)(z-0.5) = z^2 - 0.7z + 0.1 = 0$$

Por lo tanto:

$$\phi(A_{bb}) = A_{bb}^2 + 0.7A_b + 0.1I = \begin{bmatrix} -1.60 & 1.60 \\ -2.72 & 2.08 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab}A_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab}A_{bb} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1.60 & 1.60 \\ -2.72 & 2.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.25 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

La ecuación del observador es, en este caso:

$$q_b(k+1) = [A_{bb} - LA_{ab}]q_b(k) + Ly(k+1) + [A_{ba} - LA_{aa}]y(k) + [B_b - LB_a]u(k)$$

$$[A_{bb} - LA_{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.7 & 2.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.6 \end{bmatrix} [0.8 \quad 0] = \begin{bmatrix} -1.60 & 1.0 \\ -3.78 & 2.3 \end{bmatrix}$$

$$[A_{ba} - LA_{aa}] = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.6 \end{bmatrix} [0] = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[B_b - LB_a] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.6 \end{bmatrix} [0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_b(k+1) = \begin{bmatrix} -1.60 & 1.0 \\ -3.78 & 2.3 \end{bmatrix} q_b(k) + \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.6 \end{bmatrix} y(k+1) + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

c. La ecuación del controlador es:

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} =$$

$$K_1 + K_b[zI - A_{bb} + LA_{ab} + (B_b - LB_a)K_b]^{-1}[Lz + A_{ba} - LA_{aa} - K_1(B_b - LB_a)]$$

$$[zI - A_{bb} + LA_{ab} + (B_b - LB_a)K_b] = \begin{bmatrix} z + 1.6 & -1 \\ 2.52 & z - 1.2 \end{bmatrix}$$

$$[Lz + A_{ba} - LA_{aa} - K_1(B_b - LB_a)] = \begin{bmatrix} 2z \\ 2.6z + 0.06 \end{bmatrix}$$

$$D(z) = 0.44 + [-1.26 \quad 1.1] \begin{bmatrix} z + 1.6 & -1 \\ 2.52 & z - 1.2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2z \\ 2.6z + 0.06 \end{bmatrix}$$

$$D(z) = \frac{0.78z^2 - 0.978z + 0.294}{z^2 + 0.4z + 0.6} = \frac{0.78(z - 0.7538)(z - 0.5)}{z^2 + 0.4z + 0.6}$$

d. La función de transferencia de lazo cerrado del sistema planta-controlador con el factor de corrección de error K_o incluido en el circuito del set-point es:

$$G_w(z) = \frac{K_o HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

En donde $HG(Z)$ es la función de transferencia de pulso de la planta y, está dada por:

$$HG(z) = C(zI - A)^{-1}B = \frac{0.8}{(z-1)(z-0.8)(z-0.5)}$$

Por lo tanto:

$$G_w(z) = \frac{0.8(z^2 + 0.4z + 0.6)}{(z-0.2)(z-0.2)(z-0.4)(z-0.5)(z-0.6)}$$

Para que el error de estado estable ante una entrada en escalón unitario sea igual a cero, se debe cumplir la ecuación 9.76:

$$\lim_{z\to 1} G_w(z) = \lim_{z\to 1} \frac{K_o HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} = 1$$

Reemplazando $G_w(z)$:

$$\lim_{z\to 1} \frac{0.8(z^2 + 0.4z + 0.6)K_0}{(z-0.2)(z-0.2)(z-0.4)(z-0.5)(z-0.6)} = 1$$

Tomando el límite se obtiene:

$$K_o = 0.048$$

La figura 9.16 corresponde al sistema de control diseñado en el ejemplo 9.7. La figura 9.17a muestra la respuesta del sistema ante un escalón unitario sin el factor de corrección K_o y la figura 9.17b da la respuesta con el factor K_o incluido en el circuito del set-point. En ella se muestra la disposición del controlador $D(z)$ en la realimentación y el factor de corrección K_o en el circuito del set-point.

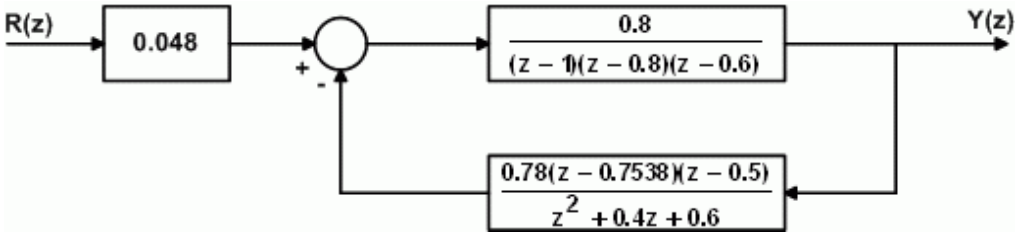


Figura 9.16 Configuración del sistema de control para el ejemplo 9.7

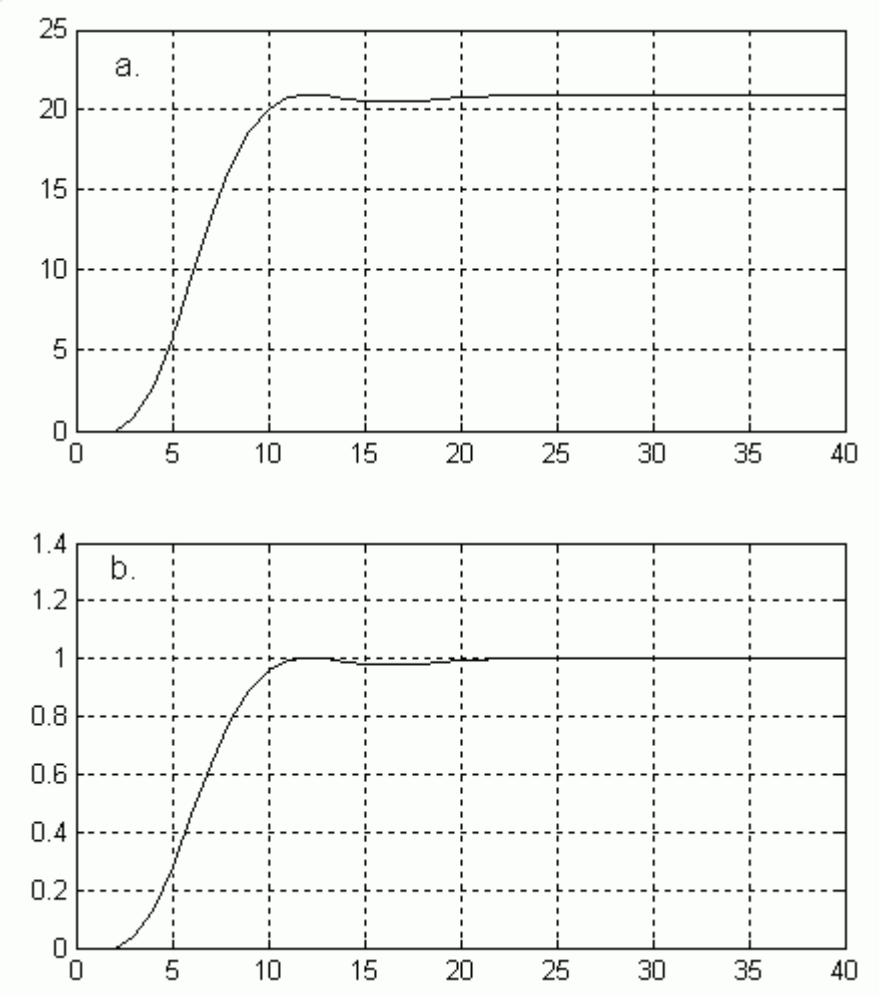


Figura 9.17 a) Respuesta del sistema al escalón unitario sin el factor K_0. b) Respuesta del sistema con $K_0 = 0.048$

9.10 SISTEMAS TIPO SERVO

La figura 9.18 muestra un sistema de control por realimentación del estado en el cual se utiliza un integrador adicional para estabilizar adecuadamente el sistema y mejorar su exactitud.

La ecuación de estado de la planta y su correspondiente ecuación de salida son, respectivamente:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 9.108$$

$$y(k) = Cx(k) \qquad 9.109$$

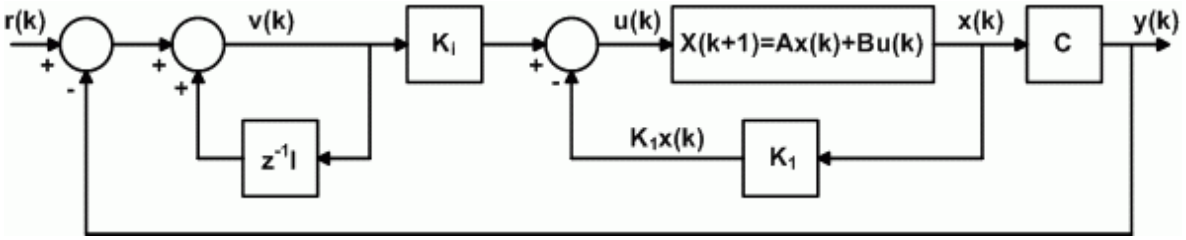


Figura 9.18 Sistema tipo Servo con realimentación del estado

La ley de control para el sistema es:

$$u(k) = -K_1 x(k) + K_i v(k) \qquad 9.110$$

$$v(k) = r(k) - y(k) + v(k-1) \qquad 9.111$$

De las ecuaciones 9.110 y 9.111 se obtiene:

$$u(k+1) = -K_1 x(k+1) + K_i[r(k+1) - y(k+1) + v(k)]$$

$$u(k+1) = -K_1[Ax(k) + Bu(k)] + K_i[r(k+1) - C\{Ax(k) + Bu(k)\} + v(k)]$$

$$u(k+1) = [-K_1 A - K_i CA]x(k) + [-K_1 B - K_i CB]u(k) + K_i r(k+1) + K_i v(k) \qquad 9.112$$

De la ecuación 9.110 se obtiene:

$$K_i v(k) = u(k) + K_1 x(k)$$

$$K_i v(k) = u(k) + K_1 x(k)$$

Entonces:

$$u(k+1) = [K_1 - K_1 A - K_i CA]x(k) + [I - K_1 B - K_i CB]u(k) + K_i r(k+1) \qquad 9.113$$

Las ecuaciones 9.108 y 9.113 se pueden escribir en forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ K_1 - K_1 A - K_i CA & I - K_1 B - K_i CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_i \end{bmatrix} r(k+1) \qquad 9.114$$

La ecuación de salida del sistema es:

$$y(k) = [C \quad 0]x(k) \qquad 9.115$$

Si la referencia es un escalón de magnitud r, entonces $r(k+1) = r(k) = r$.

Con esta consideración, la ecuación 9.114 se puede escribir en la forma:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ K_1 - K_1 A - K_i CA & I - K_1 B - K_i CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_i \end{bmatrix} r \qquad 9.116$$

Para realizar el diseño, utilizando la técnica de asignación de polos, se debe estimar la matriz K_i correspondiente al integrador y la matriz K_1 correspondiente a la matriz de ganancia de realimentación. Se puede demostrar que [9.5]:

$$[K_1 \vdots K_i] = \left[\widehat{K} + [0 \vdots I_m]\right]\left[\frac{A - I_n}{CA}\middle|\frac{B}{CB}\right]^{-1} \qquad 9.117$$

En donde:

$$\widehat{K} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]\left[\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B} \quad \cdots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B}\right]^{-1}\phi(\hat{A}) \qquad 9.118$$

$$\hat{A} = \left[\frac{A}{0}\middle|\frac{B}{0}\right]_{(n+m)\times(n+m)} \qquad B = \left[\frac{0}{I_m}\right]_{(n+m)\times m} \qquad 9.119$$

La figura 9.19 muestra el sistema de control por realimentación del estado observado incluyendo un integrador en la trayectoria directa

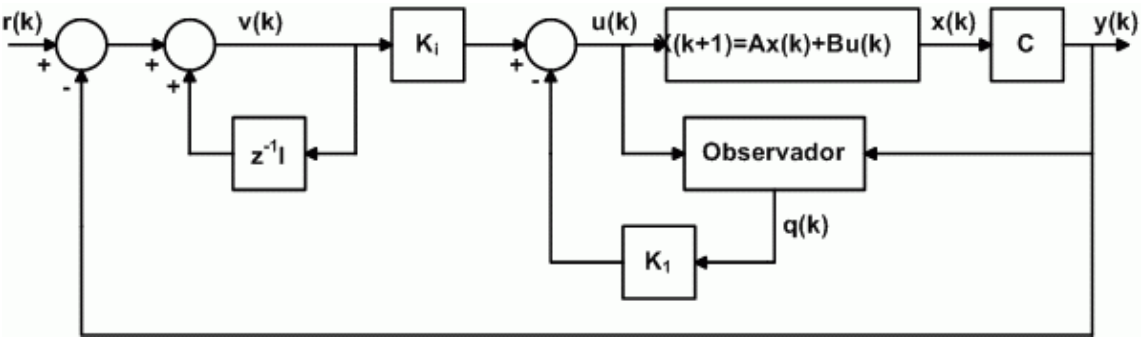


Figura 9.19 Sistema tipo Servo con realimentación del estado observado

La ecuación de estado de la planta y su correspondiente ecuación de salida son, respectivamente:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 9.120$$

$$y(k) = Cx(k) \qquad 9.121$$

La ley de control para el sistema es:

$$u(k) = -K_1 q(k) + K_i v(k) \qquad 9.122$$

$$v(k) = r(k) - y(k) + v(k-1) \qquad 9.123$$

La ecuación correspondiente al observador está dada por la ecuación 9.52:

$$q(k+1) = [A - LC]q(k) + Ly(k) + Bu(k) \qquad 9.124$$

Tomando la transformada z a las ecuaciones 9.122 y 9.124 se obtiene:

$$U(z) = -K_1 Q(z) + K_i V(z) \qquad 9.125$$

$$zQ(z) = [A - LC]Q(z) + LY(z) + BU(z)$$

$$[zI - A + LC]Q(z) = LY(z) + BU(z)$$

$$Q(z) = [zI - A + LC]^{-1}LY(z) + [zI - A + LC]^{-1}BU(z) \qquad 9.126$$

Reemplazando la expresión para $Q(Z)$ en la ecuación 9.125 resulta:

$$U(z) = -K_1[zI - A + LC]^{-1}LY(z) - K_1[zI - A + LC]^{-1}BU(z) + K_i V(z)$$

Si se asume que la variable $u(k)$ es un escalar se obtiene, después de simplificar y agrupar términos:

$$[1 + K_1[zI - A + LC]^{-1}B]U(z) = -K_1[zI - A + LC]^{-1}LY(z) + K_i V(z)$$

$$U(z) = [1 + K_1[zI - A + LC]^{-1}B]^{-1}[K_i V(z) - K_1[zI - A + LC]^{-1}LY(z)] \qquad 9.127$$

Al tomar la transformada z a la ecuación 9.123 se obtiene:

$$V(z) = \frac{z[R(z) - Y(z)]}{z - 1} \qquad 9.128$$

Combinando las ecuaciones 9.127 y 9.128 resulta:

$$U(z)$$

$$= \frac{[1 + K_1[zI - A + LC]^{-1}B]^{-1}[K_i z[R(z) - Y(z)] - K_1(z-1)[zI - A + LC]^{-1}LY(z)]}{z - 1} \qquad 9.129$$

Las matrices K_i y K_1 se obtienen utilizando las ecuaciones 9.117 y 9.118. La matriz L, correspondiente a la matriz de ganancia del observador, se calcula a partir de la ecuación 9.82 para observador de orden completo o de la ecuación 9.100 para observador de orden reducido.

EJEMPLO 9.8

La dinámica de cierto tanque presurizado está dada por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [0 \quad 1]x(k)$$

a) Diseñar la matriz de ganancia de realimentación K incluyendo integrador de modo que el sistema en lazo cerrado tenga polos ubicados en el origen. b) Diseñar un observador de orden completo con polos ubicados en el origen. c) Establecer la ley de control para el sistema.

SOLUCION: a) La matriz $\widehat{K}$, que contiene a la matriz de realimentación K y a la matriz del integrador K_i se calcula a partir de las ecuaciones 9.117, 9.118 y 9.119.

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.4 & 0.2 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{K} = [0 \quad 0 \quad 1][\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B}]^{-1}\phi(\hat{A})$$

La ecuación característica deseada para el sistema, en lazo cerrado, es: $z^3 = 0$, entonces:

$$\phi(\hat{A}) = \hat{A}^3 = \begin{bmatrix} 0.204 & 0.172 & 0.260 \\ 0.430 & 0.376 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.0 \end{bmatrix} \qquad [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -0.8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{K} = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -0.8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.204 & 0.172 & 0.260 \\ 0.430 & 0.376 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{K} = [0.86 \quad 0.752 \quad 1]$$

$$[K_1 \vdots K_i] = \left[\widehat{K} + [0 \vdots I_m]\right]\left[\begin{array}{c|c} A - I_n & B \\ \hline CA & CB \end{array}\right]^{-1}$$

$$\left[\widehat{K} + [0 \vdots I_m]\right] = [0.86 \quad 0.752 \quad 2]$$

$$[A - I_n] = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.2 \\ 0.5 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$CA = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix} = [0.5 \quad 0.6] \qquad CB = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A - I_n & B \\ \hline CA & CB \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.2 & 1 \\ 0.5 & -0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_1 \vdots K_i] = [0.86 \quad 0.752 \quad \vdots \quad 2]\begin{bmatrix} -0.6 & 0.2 & 1 \\ 0.5 & -0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = [2 \quad 2.12 \quad \vdots \quad 2]$$

$$K_1 = [2 \quad 2.12] \qquad K_i = [2]$$

b) El diseño del observador se realiza utilizando la formula de Ackerman:

$$L = \phi(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica deseada para el observador es: $z^2 = 0$, por lo tanto:

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.2 \\ 0.5 & 0.46 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.2 \\ 0.5 & 0.46 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 0.52 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación del observador es:

$$q(k+1) = [A - LC]q(k) + Ly(k) + Bu(k)$$

$$q(k+1) = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.32 \\ 0.5 & -0.40 \end{bmatrix} q(k) + \begin{bmatrix} 0.52 \\ 1 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

b) La ley de control para el sistema está dada por:

$$U(z) = \frac{[1 + K_1[zI - A + LC]^{-1}B]^{-1}[K_i z[R(z) - Y(z)] - K_1(z-1)[zI - A + LC]^{-1}LY(z)]}{z - 1}$$

$$K_1[zI - A + LC]^{-1}B = \frac{2z + 1.86}{z^2}$$

$$K_1\,[zI - A + LC]^{-1}L = \frac{3.16z - 0.52}{z^2}$$

$$U(z) = \frac{2z^3R(z) - (2z^3 + 3.16z^2 - 3.68z + 0.52)Y(z)}{(z-1)(z^2 + 2z + 1.86)}$$

$$U(z) = \frac{2R(z) - 2Y(z) - 3.16z^{-1}Y(z) + 3.68z^{-2}Y(z) - 0.52z^{-3}Y(z)}{1 + z^{-1} - 0.14z^{-2} - 1.86z^{-3}}$$

Tomando transformada z y, despejando $u(k)$ se obtiene:

$$u(k) = 2r(k) - 2y(k) - 3.16y(k-1) - 3.68y(k-2) - 0.52y(k-3) - u(k-1) + 0.14u(k-2) + 1.86u(k-3)$$

Esta última ecuación corresponde a la ley de control para el sistema.

La figura 9.20 muestra la respuesta del tanque cuanto se aplica a su entrada un escalón unitario y la figura 9.21 corresponde a la representación del sistema implementado en Simulink para obtener la respuesta del mismo

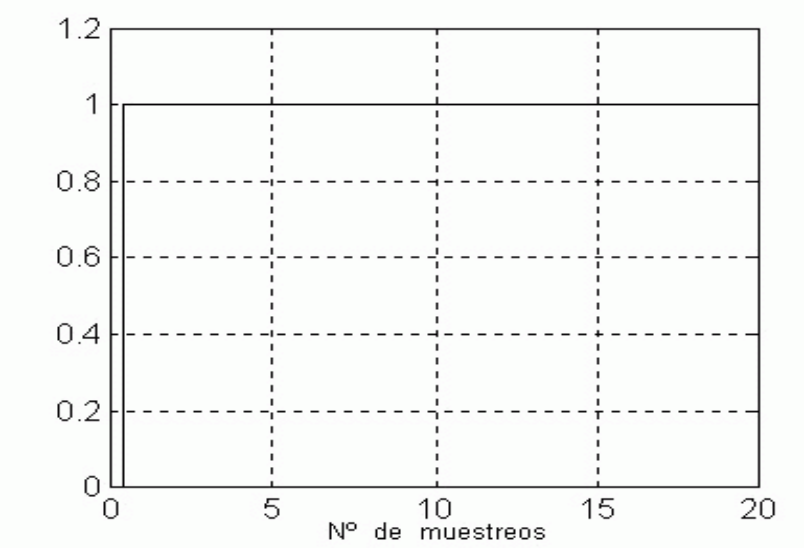


FIGURA 9.20 Respuesta del sistema del ejemplo 9.8 ante un escalón unitario aplicado en la referencia.

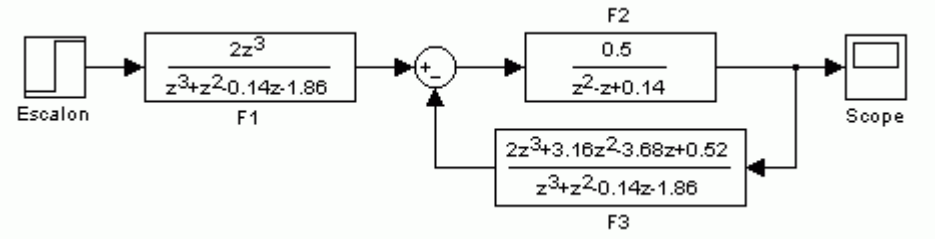


FIGURA 9.21 Representación del sistema del ejemplo 9.8 en Simulink para simular su respuesta.

9.11 SISTEMAS NO LINEALES

En la práctica, todos los sistema físicos presentan algún grado de alinealidad por lo tanto, estrictamente hablando, no existen sistemas físicos perfectamente lineales y los modelos con que se trabajan son ideales y basados en simplificaciones con el fin de facilitar el análisis y diseño de sus sistemas de control. Cuando las magnitudes de las señales aplicadas al sistema de control

están dentro de un rango en el cual exhibe una característica lineal, el sistema se puede considerar básicamente lineal. Pero cuando los valores de las señales sobrepasan el rango de la parte lineal, el sistema no se puede considerar lineal [9.6].

Para el análisis y diseño de sistemas de control lineal existe, como se ha visto, una gran cantidad de técnicas y métodos bien definidos. Por su parte, los sistemas no lineales son difíciles de tratar en forma matemática y los procedimientos para hallar soluciones a problemas presentes en estos sistemas son bastante complicados. Debido a esta dificultad, se hace necesario introducir sistemas lineales "equivalentes" para reemplazar los no lineales. Estos sistemas "equivalentes" se pueden obtener mediante linealización del sistema no lineal en un rango restringido de funcionamiento. Una vez obtenida la aproximación del sistema no lineal por medio de un modelo matemático lineal, se le pueden aplicar técnicas y métodos lineales para su análisis y diseño [9.7].

9.11.1 Linealización de sistemas no lineales: un sistema no lineal se puede representar mediante ecuaciones de estado en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x,u,t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x,u,t) \\ \cdots &\quad \cdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x,u,t) \\ y &= h(x,u,t) \end{aligned} \qquad 9.130$$

La ecuación 9.130 se puede escribir en la forma matricial así:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)] \\ y(t) &= h[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)] \end{aligned} \qquad 9.131$$

En donde $\boldsymbol{x}(t)$ corresponde al vector de estado $(n \times 1)$, $\boldsymbol{u}(t)$ al vector de entradas $(r \times 1)$ y $\boldsymbol{f}[x(t), u(t)]$ es un vector que es función del vector de estado y del vector de entrada.

Para linealizar el sistema descrito por la ecuación 9.131 existen diferentes métodos: uno de ellos consiste en la expansión de las ecuaciones de estado no lineales en series de Taylor alrededor de un punto o de una trayectoria de

operación nominal del sistema, despreciando los términos de orden superior al primero, con lo cual resulta una aproximación lineal de las ecuaciones de estado en un punto determinado.

Si x_o es el punto o la trayectoria de operación nominal correspondiente a la entrada nominal u_o, al expandir la ecuación 9.131 en una serie de Taylor y, despreciando los términos de orden superior, resulta:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_o, u_o) + \sum_{j=1}^{n} K_j(x_j - x_{oj}) + \sum_{j=1}^{r} P_j(u_j - u_{oj}) \qquad 9.133$$

En donde:

$$K_j = \left.\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j}\right|_{(x_o,u_o)} \qquad P_j = \left.\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_j}\right|_{(x_o,u_o)} \qquad 9.134$$

Si se hace: $\hat{x}_i = x_i - x_{oi}$ y $\hat{u}_i = u_i - u_{oi}$ se obtiene, al reemplazar estas expresiones en la ecuación 9.133:

$$\dot{\hat{x}}_i + \dot{\hat{x}}_{oi} = f(x_o, u_o) + \sum_{j=1}^{n} K_j\,\hat{x}_j + \sum_{j=1}^{r} P_j\,\hat{u}_j \qquad 9.135$$

Teniendo en cuenta que: $\dot{\hat{x}}_{oi} = f(x_o, u_o)$ se obtiene:

$$\dot{\hat{x}}_i = \sum_{j=1}^{n} K_j\,\hat{x}_j + \sum_{j=1}^{r} P_j\,\hat{u}_j \qquad 9.136$$

La ecuación 9.136 se puede escribir en la siguiente forma matricial:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}_i + \hat{B}\hat{u}_i \qquad 9.137$$

En donde:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \vdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \vdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \qquad 9.138$$

Para que el sistema linealizado "se aproxime" convenientemente al sistema no lineal, los valores de $x(t)$ y de $u(t)$ deben mantenerse siempre lo más cerca posible a los valores de referencia x_o y u_o respectivamente.

Además, x_o y u_o corresponden a los puntos de equilibrio de la ecuación 9.130 y para ellos se cumple que:

$$\hat{\dot{x}}_{oi} = f_i(x_o, u_o) = 0 \qquad 9.139$$

9.11.2 Diseño de Controladores para Sistemas no Lineales: Teniendo en cuenta la buena cantidad de herramientas existentes para el análisis y diseño de controladores de sistemas lineales, una de las técnicas utilizadas para este fin en los sistemas no lineales es linealizarlos previamente alrededor de un punto de operación y luego tratarlos como sistemas lineales. Este método puede presentar inconvenientes cuando la zona de funcionamiento del sistema se aleja apreciablemente del punto de operación alrededor del cual se realizó la linealización puesto que, en este caso, el modelo pierde precisión con respecto a la planta verdadera con la que se está trabajando. Para explicar el procedimiento de diseño de controladores para sistemas no lineales se presenta a continuación un ejemplo.

EJEMPLO 9.9

Las siguientes ecuaciones corresponden al modelo matemático de un giroscopio electrostático:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x} = -x_1 - x_3^2 + 1$$
$$\dot{x}_3 = x_3 - x_1 x_3 - u$$
$$y = x_1$$

El punto de operación deseado es $u_o = 8$

a) Linealice el sistema en el punto de operación deseado. b) Discretice el modelo lineal obtenido utilizando un período de muestreo $T = 0.5\ s$ c) Diseñe un controlador discreto utilizando técnicas de realimentación de estado, de modo que

el sistema en lazo cerrado tenga sus polos en el origen. d) Grafique la respuesta del sistema no lineal con el controlador diseñado.

SOLUCION. a) La linealización se debe realizar alrededor del punto de operación $u_o = 8$. Para los puntos de equilibrio se tiene, según la ecuación 9.139:

$$\hat{\dot{x}}_{oi} = f_i(x_o, u_o) = 0$$

$$x_2 = 0$$
$$-x_1 - x_3^2 + 1 = 0$$
$$x_3 - x_1 x_3 - u = 0$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se obtiene que, en el punto de equilibrio $u_o = 8$, $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 2$. Es decir: $x_{oi} = [-3 \quad 0 \quad 2]^T$

Las matrices $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se evalúan con la ecuación 9.138

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix}$$

Evaluando las derivadas parciales en el punto de equilibrio se obtiene:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = -4 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -2 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 4 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial u} = -1$$

Así, el sistema linealizado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

La función de transferencia del sistema continuo equivalente es:

$$G_p(S) = C[SI - A]^{-1}B$$

Es decir:

$$G_p(S) = \frac{4}{S^3 - 4S^2 + S - 12}$$

$$G_p\ (S)\ =\ \frac{4}{S^3\ -\ 4S^2\ +\ S\ -\ 12}$$

c) La discretización del modelo, con $T\ =\ 0.5\ s$ da:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{4}{S(S^3 - 4S^2 + S - 12)}\right\}$$

Utilizando el MATLAB:

$$HG(z) = \frac{0.1491z^2 + 1.0206z + 0.3906}{z^3 - 10.2337z^2 + 11.9419z - 7.3891}$$

La representación en el espacio de estado discreto para el sistema linealizado, en la forma canónica observable es:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 10.2337 & 1 & 0 \\ -11.9419 & 0 & 1 \\ 7.3891 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1491 \\ 1.0206 \\ 0.3906 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0]x(k)$$

d) La ecuación característica deseada para el sistema en lazo cerrado y para el observador es : $z^3 = 0$ por lo tanto:

$$K = [0 \quad 0 \quad 1][B \quad AB \quad A^2B]^{-1}\phi(A) \qquad \phi(A) = A^3$$

$$[B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0.1491 & 2.5464 & 24.6696 \\ 1.0206 & -1.3899 & -29.3077 \\ 0.3906 & 1.1017 & 18.8159 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 834.7 & 92.8 & 10.2 \\ 1032.4 & -114.8 & -11.9 \\ 685.6 & 75.6 & 7.4 \end{bmatrix}$$

$$K = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0.1491 & 2.5464 & 24.6696 \\ 1.0206 & -1.3899 & -29.3077 \\ 0.3906 & 1.1017 & 18.8159 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 834.7 & 92.8 & 10.2 \\ 1032.4 & -114.8 & -11.9 \\ 685.6 & 75.6 & 7.4 \end{bmatrix}$$

$$K = [38.5915 \quad 4.2449 \quad 0.3774]$$

$$L = \phi(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \phi(A) = A^3$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10.2337 & 1 & 0 \\ 92.7867 & 10.2337 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 834.7 & 92.8 & 10.2 \\ 1032.4 & -114.8 & -11.9 \\ 685.6 & 75.6 & 7.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10.2337 & 1 & 0 \\ 92.7867 & 10.2337 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 10.2337 \\ -11.9419 \\ 7.3891 \end{bmatrix}$$

La ecuación para el controlador con observador de orden completo tipo predictor es:

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = K[zI - A + BK + LC]^{-1}L$$

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{347.03z^2 - 429.4896z + 285.1561}{z^4 + 10.2337z^2 + 41.0445z + 15.0738}$$

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado está dada por:

$$G_w(z) = \frac{HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

$$G_w(z) = \frac{0.1491z^5 + 2.5464z^4 + 16.9548z^3 + 48.1348z^2 + 31.4163z + 5.8878}{z^6}$$

El valor del factor de corrección de error K_o esta dado por:

$$\lim_{z\to 1} K_o G_w(z) = 1$$

$$\lim_{z\to 1} K_o \left[\frac{0.1491z^5 + 2.5464z^4 + 16.9548z^3 + 48.1348z^2 + 31.4163z + 5.8878}{z^6}\right] = 1$$

$$K_o = 0.009515$$

La figura 9.22 muestra la respuesta del sistema ante una entrada en escalón unitario con el controlador diseñado y el factor de corrección de error en el circuito del set-point.

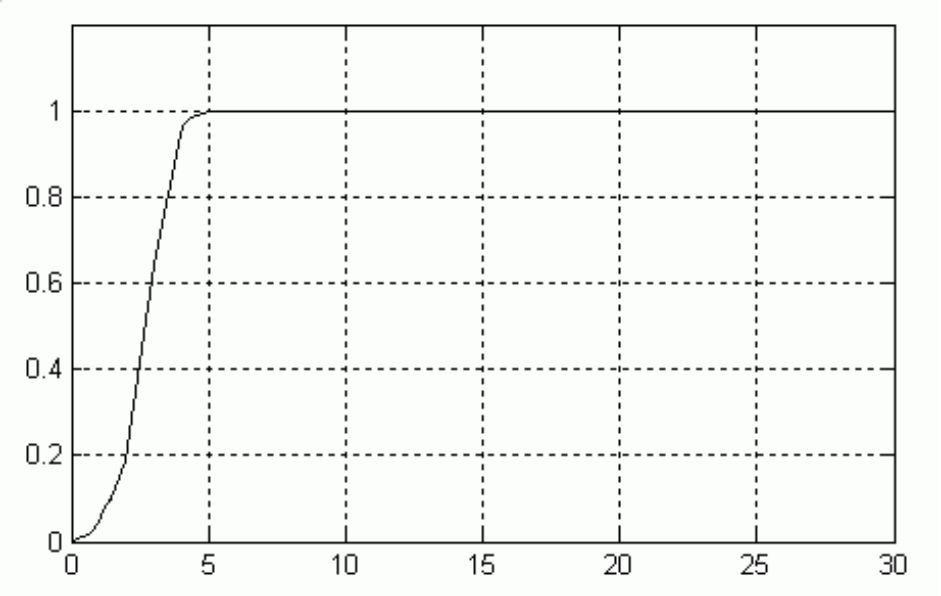


Figura 9.22 Respuesta del sistema del ejemplo 9.9 a un escalón unitario

PROBLEMAS PROPUESTOS

9.1 Determine la controlabilidad y la observabilidad de los sistemas de control discretos cuya representación en el espacio de estado se da continuación:

a) $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.14 \\ -0.4 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [0 \quad 1] x(k)$

b) $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.24 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [0.2 \quad 0.1] x(k)$

c) $x(k+1) = \begin{bmatrix} 2.3 & -0.2 & -0.8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [0 \quad 1 \quad 0.5] x(k)$

d) $x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.9 & -0.55 & -0.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [0 \quad 0.1 \quad -0.16] x(k)$

e) $x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.37 & -0.12 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [0 \quad 0.2 \quad 0] x(k)$

f) $x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.895 & 0.895 & 0.715 \\ 0.105 & 0.895 & -0.285 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad y(k) = [-0.01 \quad 0.01 \quad 0.19] x(k)$

9.2 Para cada uno de los sistemas de control discretos dados a continuación determinar: a) la matriz de ganancia de realimentación K de modo que el sistema tenga polos de lazo cerrado en el lugar indicado. b) La respuesta del sistema en lazo cerrado ante un escalón unitario y el valor del factor de corrección K_o para que la respuesta del sistema tenga error de estado estable igual a cero.

a) $x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.9 & -1.1 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$ $\quad y(k) = [0 \quad 0 \quad 0.2]x(k)$

Polos en: $z = 0;\ 0.2\ y\ 04$

b) $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1.7 & -0.1 & 1.9 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$ $\quad y(k) = [0.5 \quad 0 \quad 0]x(k)$

Polos en: $z = 0.2;\ 0.4$ y 0.4

c) $x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.2 & -1 & 2.3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -0.2 & -2 & 2.3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$ $\quad y(k) = [0.04 \quad 0.2 \quad -0.04]x(k)$

Polos en: $z = 0;\ 0$ y 0

d) $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$ $\quad y(k) = [1 \quad 1]x(k)$

Polos en: $z = 0.5$ y 0.5

9.3 Para cada uno de los sistemas de control discreto propuestos en el problema 9.2, diseñe un observador de estado tipo predictor y un observador de estado tipo corriente, con los polos indicados en el mismo problema.

9.8 Para los sistemas de control discreto que se dan a continuación: a) Evalúe la matriz de ganancia de realimentación K y la matriz del observador L (tipo predictor), de modo que el sistema, en lazo cerrado, tenga sus polos en el lugar especificado. b) Obtenga, para cada caso, la ecuación del controlador. c) Calcule, si es necesario, el factor de corrección de error en el circuito del set-point K_o, de modo que el sistema tenga error igual a cero ante una entrada en escalón unitario. Obtenga la respuesta al escalón para cada sistema con su respectivo controlador.

a) $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$ $\quad y(k) = [2 \quad -1]x(k)$

Polos para la matriz de ganancia de realimentación K en: $z = 0.4$ y 0.6

Polos para el observador en: $z = 0.2$ y 0.3

b) $x(k+1)=\begin{bmatrix}0.3 & 0 & 0\\ 0.2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}3\\ 0\\ -1\end{bmatrix}u(k)$ $\quad y(k)=[0 \quad 1 \quad 1]x(k)$

Polos Para la matriz K en: $z=0.4\pm j0.2$ y $z=0.5$

Polos Para el observador en: $z=0.3\pm j0.2$ y $z=0.4$

c) $x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0.2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(k)$ $\quad y(k)=[2 \quad 1 \quad 0]x(k)$

Polos Para la matriz K en: $z=0.5\pm j0.5$ y $z=0$

Polos Para el observador en: $z=0;\ z=0\ y\ z=0.5$

9.5 Resuelva el problema anterior asumiendo que el observador es de tipo corriente.

9.6 Para los sistemas de control discreto que se dan a continuación, se supone que solo es medible la salida $y(k)$. Se desea que el sistema en lazo cerrado presente respuesta con oscilaciones muertas. a) Obtenga la matriz de ganancia de realimentación K. b) Diseñe un observador de orden reducido para el sistema. c) Obtenga la ecuación del controlador y el valor del factor de corrección de error en el circuito del set-point para que el error del sistema ante una entrada en escalón unitario sea igual a cero.

a) $x(k+1)=\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0.6 & 0\\ 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u(k)$ $\quad y(k)=[0.5 \quad -0.2 \quad 0.3]x(k)$

b) $x(k+1)=\begin{bmatrix}1.4 & -0.72 & 0.09\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(k)$ $\quad y(k)=[0 \quad 0.25 \quad 0.25]x(k)$

c) $x(k+1)=\begin{bmatrix}1.7 & -1.08 & 0.16\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(k)$ $\quad y(K)=[0 \quad 0.04 \quad 0.16]x(k)$

d) $x(k+1)=\begin{bmatrix}-0.28 & -1.42 & 1.76\\ -1 & -1 & 2\\ -0.26 & -2.42 & 2.76\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(k)$ $\quad y(k)=[-0.2 \quad 0.3 \quad 0.2]x(k)$

9.7 Para cada uno de los sistemas discretos propuestos en el problema 9.6 obtener: a) La matriz de ganancia de realimentación K incluyendo integrador de modo que el sistema, en lazo cerrado, tenga polos ubicados en el origen del plano z. b) Un observador de orden completo con oscilaciones muertas. c) Establecer la ley de control del sistema con los resultados obtenidos en a y b .d) Obtenga la respuesta del sistema ante un escalón unitario.

9.8 La dinámica de un intercambiador de calor se puede describir mediante un modelo de segundo orden de la forma:

$$G_p(S) = \frac{e^{-\theta S}}{(aS+1)(bS+1)}$$

Asumiendo $\theta = 0.5\,s$, $a = 60\,s$, $b = 10\,s$, período de muestreo $T = 5\,s$, y que el sistema está precedido por un retenedor de orden cero obtener: a) La función de transferencia de pulso del intercambiador b) Una representación del sistema en el espacio de estado discreto c) La matriz de ganancia de realimentación K incluyendo integrador, de modo que el sistema tenga polos en $z = 0$ y en z = $0.8 \pm j0.25$. c) Diseñe un estimador de estados con polos en $z = 0$; $z = 0.5$ y $z = 0.5$ e) Obtenga la ley de control para el sistema. f) Obtenga la respuesta del sistema ante un escalón unitario aplicado en la referencia.

9.9 La figura 9.23 corresponde al modelo aproximado de un motor de DC controlado por campo. Las ecuaciones correspondientes al modelo del motor son:

$$\tau(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t)$$
$$e_f(t) = R_f i_f(t) + L_f \dot{i}_f(t)$$
$$\tau(t) = K_t i_f(t)$$

En donde $K_t = 2{,}5\,N.m/A$, $R_f = 5\Omega$, $L_f = 500\,mH$, $B = 0.25\,N.m/Rad/seg$, $J = 0.2\,kg,m^2$.

a) Obtenga la función de transferencia del motor $\theta(S)/E_f(S)$ b) Discretice el modelo obtenido con $T = 0.01\,s$. c) Obtenga una representación de estado en

tiempo discreto para el motor. d) Se desea que el motor tenga respuesta con oscilaciones muertas. Diseñe la matriz de ganancia K (incluyendo el integrador) y la matriz de ganancia del observador L e) Calcule la ley de control con los resultados obtenidos en d y obtenga la respuesta del motor ante un escalón unitario aplicado en la referencia.

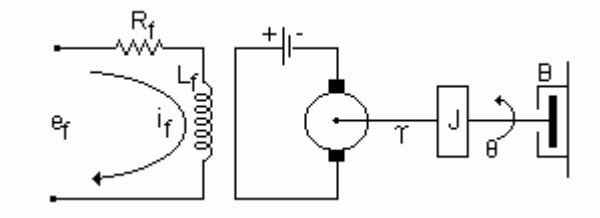


Figura 9.23 Motor de DC controlado por campo

9.10 Dado el sistema no lineal:

$$\dot{x}_1 = x_2^2 - \cos x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2^2 + x_2 - 3 + u$$

$$y = x_1 + x_2 \qquad\qquad x_2 > 0$$

a) Linealice el sistema alrededor del punto $u_o = 1$ b) Obtenga la función de transferencia del sistema continuo c) Discretice el sistema con $T = 0.1\,s$. d) Obtenga su ecuación de estado en tiempo discreto en forma canónica controlable. e) Diseñe para el sistema linealizado, un controlador de modo que el sistema tenga sus polos de lazo cerrado ubicados en el origen y que garantice error cero ante una entrada en escalón.

9.11 Cierto sistema no lineal se puede modelar mediante la ecuación:

$$\ddot{y}(t) + 0.5\dot{y}^3(t) + y(t) = u(t)$$

Seleccione como variables de estado $x_1 = y(t)$ y $x_2 = \dot{y}(t)$ a) Obtenga la ecuación de estado del sistema no lineal. b) Linealice el sistema alrededor del punto de equilibrio $u_o = 2$. c) Obtenga la ecuación de estado del sistema linealizado d) Obtenga la matriz de ganancia de realimentación para que el

sistema, en lazo cerrado tenga polos en $S = -2$ y $S = -5$ e) Diseñe un observador de estado con polos en $S = -4$ y $S = -3$ f) Obtenga la ecuación del controlador que haga cumplir las especificaciones dadas.

9.12 La dinámica de cierto sistema de control de posición no lineal se puede modelar mediante las ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = 20x_2$$
$$\dot{x}_2 = 60\tan^{-1}u$$
$$y = x_1$$

En donde $x_1 = y$ es la posición y $x_2 = v$ representa la velocidad. a) Obtenga los puntos de equilibrio para el sistema. b) Linealice el sistema alrededor del punto de equilibrio. c) Discretice el sistema con $T = 0.01\,s$. d) Diseñe un controlador utilizando técnicas de realimentación de estado y asignación de polos de modo que el sistema en lazo cerrado tenga tiempo de establecimiento de 0.15 s y máximo sobreimpulso del 10%.

9.13 Dado el sistema no lineal:

$$\dot{x} = x - ax^2 - cxy$$
$$\dot{y} = y - by^2 + dxy$$

Con las condiciones: $x > 0 \quad y > 0$

$$a, b, c, d > 0$$
$$b < c$$

a) Establezca los puntos de equilibrio del sistema. b) Linealice el sistema alrededor de cada uno de los puntos de equilibrio determinados. c) Analice la estabilidad de cada uno de los sistemas obtenidos en el proceso de linealización.

9.14 Para el sistema del problema 9.12 diseñe un controlador PI por asignación de polos de modo que el sistema en lazo cerrado tenga tiempo de establecimiento de 0.15 s. y coeficiente de amortiguamiento de 0.8

9.15 La figura 9.24 muestra un sistema de levitación magnética. La esfera queda suspendida en el aire gracias a la fuerza electromagnética producida por el electroimán. La resistencia de la bobina del electroimán es R y su inductancia está dada por $L = Lo + L_1 e^{-x/\alpha}$ en donde x es la distancia entre el electroimán y la esfera. La fuerza electromagnética sobre la esfera es proporcional al cuadrado del cociente entre la corriente en el electroimán y su distancia de éste a la esfera $[F_m = \alpha(i/x^2)]$. a) Obtenga las ecuaciones diferenciales no lineales que describen la dinámica del sistema. b) Defina como variables de estado la corriente en el electroimán (i), la distancia de la esfera al electroimán (x) y la velocidad de la esfera (dx/dt) y obtenga las ecuaciones de estado no lineales para el sistema. c) Determine el punto de equilibrio del sistema y linealice las ecuaciones de estado. d) Diseñe un controlador utilizando la técnica de asignación de polos y realimentación de estado de modo que el sistema tenga todos sus polos en el origen. Asuma que $V = 10V$, $R = 100\Omega$, $m = 0.06\,Kg.$, $g = 9.81 m/s.$, $\alpha = 0.015$, $L_o = 0.15\,H$ y que $L_1 = 0.25\,H$

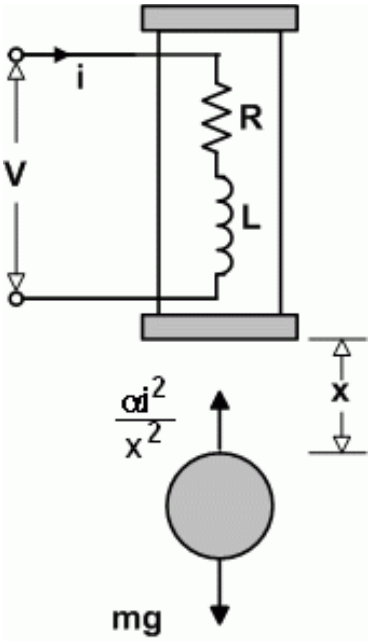


Figura 9.24 Sistema de levitación magnética

9.16 La ecuación de estado en tiempo continuo de cierto sistema de control está dada por:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t) \qquad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}$$

a) Obtenga las raíces de la ecuación característica del sistema continuo. b) Discretice el modelo con $T = 0.1\ s.$ y obtenga las raíces de su ecuación característica. c) Diseñe la matriz de ganancia de realimentación K incluyendo integrador de modo que el sistema en lazo cerrado tenga polos ubicados en el origen. d) Diseñe un observador tipo predictor de orden completo con polos ubicados en el origen. e) Establezca la ley de control para el sistema con las especificaciones dadas en los dos literales anteriores. f) Obtenga la respuesta del sistema ante un escalón unitario aplicado en la referencia.

9.17 En el intercambiador de la figura 9.25 el objetivo es calentar una corriente de proceso con temperatura de entrada $T_i(t)$ mediante un flujo de vapor. La temperatura de salida $T_o(t)$, se controla manipulando la válvula FCV que regula el flujo de vapor $f_v(t)$ al intercambiador. La temperatura de la corriente de entrada puede variar, por lo que constituye la entrada de perturbación más importante. Se supone que el resto de entradas se mantiene constante.

Experimentalmente se obtuvieron las funciones de transferencia de los componentes individuales del sistema así:

- Válvula de control:

$$\frac{Y(S)}{M(S)}=\frac{0.1}{0.05S+1}\ \ [cm/mA]$$

$$\frac{F_v(S)}{Y(S)}=40\ \ [Kg/cm.min]$$

En donde y(t) es el recorrido del vástago y m(t) la salida del controlador

- Intercambiador de calor:

Función de transferencia respecto a la entrada de control (Flujo de vapor)

$$\frac{T_o(S)}{F_v(S)} = \frac{1.5}{(0.5S+1)(0.02S+1)} \quad [min°C/Kg]$$

Función de transferencia respecto a la perturbación (temperatura de la corriente de entrada)

$$\frac{T_o(S)}{T_i(S)} = \frac{0.1}{(1.25S+1)(0.4S+1)} \quad [°C/°C]$$

- Transmisor de temperatura:

$$\frac{I(S)}{T_o(S)} = \frac{0.2}{0.025S+1} \quad [mA/°C]$$

a) Obtenga la función de transferencia del proceso $G_p(S) = I(S)/M(S)$ y la función de transferencia de la perturbación $G_D(S) = I(S)/T_i\,(S)$. b) Dibuje el diagrama de bloques del sistema incluyendo los diferentes componentes del mismo y la realimentación c) Asuma que la temperatura de la corriente de entrada permanece constante (Perturbación igual a cero), discretice la función de transferencia del proceso con $T = 0.02\,min$ y obtenga la ley de control para el mismo, incluyendo integrador y un observador tipo predictor de orden completo de modo que la respuesta de la temperatura de salida del intercambiador ante un cambio en forma de escalón aplicado en la referencia presente respuesta Deadbeat.

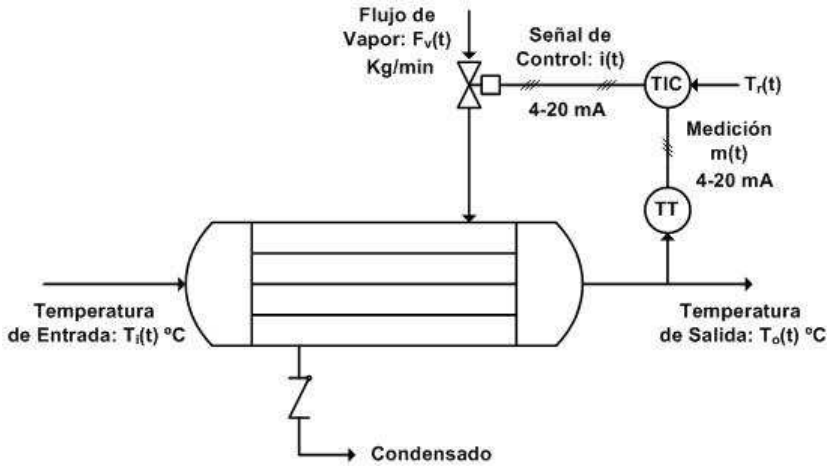


Figura 9.25. Intercambiador de calor para el problema 9.17

9.18 La Figura 9.26 representa un motor de corriente continua controlado por armadura. Si se definen como variables de estado: x_1 la corriente de armadura y x_2 la velocidad del rotor y u como la corriente de excitación o entrada, el modelo en espacio de estados correspondiente al motor se puede representar mediante el sistema no lineal:

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 u + a_3$$

$$\dot{x}_2 = -a_4 x_2 + a_5 x_1 u$$

$$y = x_2$$

Donde a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 son valores constantes positivos con valores nominales $a_1 = 50,\ a_2 = 0.8,\ a_3 = 20,\ a_4 = 5,\ a_5 = 2 \times 10^4$

Se desea mantener la velocidad del motor en un valor constante y_r

a) Demostrar que los valores admisibles de la velocidad deben cumplir con la condición: $y_r^2 \leq a_3^2 a_5 / 4 a_1 a_2 a_4$ y que el dominio de operación está restringido a $x_1 \geq a_3 / 2a_1$ b) Calcular el punto de equilibrio y linealizar el modelo del motor alrededor del punto $y_r = 5000$. c) Discretizar el modelo linealizado con $T = 0.001\ s$ d) Diseñar, para el sistema discreto, un control de velocidad con integrador incluido y observador tipo predictor de orden completo.

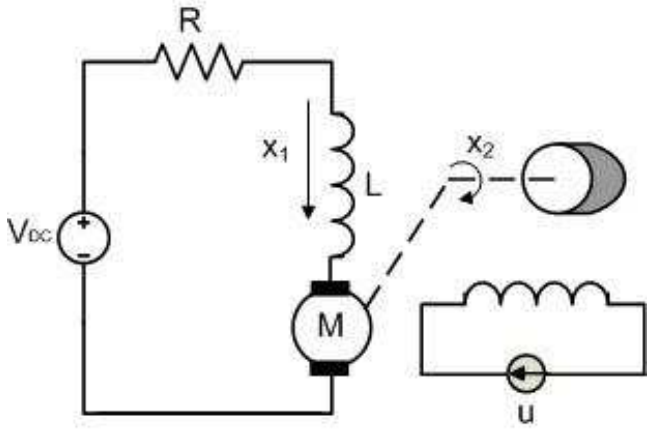


Figura 9.26. Modelo del motor para el problema 9.18

9.19 Para el sistema no lineal definido por la ecuación de estado:

$$x_1 = -x_1 + x_2$$
$$x_2 = -3x_2 + x_1^2 + 2u$$
$$x_3 = -x_1 - 2x_3$$
$$x_4 = -x_4 + x_3^2$$
$$y = x_1 - 3x_3$$

a) Obtenga los puntos de equilibrio y linealice sistema alrededor del punto $u_o = 2$ b) Determine la estabilidad del sistema linealizado. c) Si el sistema es estable utilice el simulink y obtenga la respuesta $y(t)$ con el modelo no lineal y con el modelo linealizado compare las dos respuestas y saque conclusiones.

REFERENCIAS

[9.1] Ollero, Aníbal. *Control por Computador*. Marcombo Boixareu Editores. México. 1991.

[9.2] Ogata, Katsuhico. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall. Mexico1996.

[9.3] Santina, Mohamed et al. *Digital Control Systems Design*. Saunders College Publishing . Fort Worth 1994.

[9.4] Franklin, Gene. Powell, David. *Digital control of dynamics systems*. Addison Wesley Publishing Company. Massachusetts 1994.

[9.5] Phillips, Charles. Nagle Troy. *Digital control systems analysis and design*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey 1995.

[9.6] Ogata, Katsuhico. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall. Mexico 1996.

[9.7] Slotine , Jeans. Li, Weiping. *Applied non Linear Control*. Prentice Hall. Englewood Cliffs 1991.

[9.8] Slotine, Jeans. Li, Weiping. *Applied non Linear Control*. Prentice Hall. Englewood Cliffs 1991.